

# Stimmung und Intonation bei Blechblasinstrumenten

**Mensuränderungen und deren Auswirkung bei Trompeten.**

## **Teil 2B: Akustische Eigenschaften simpler Geometrien Zylinder, Konus & Frustum im Vergleich**

Projektstand per 24.11.2024, Revision 20.0

Die aktuellste Version dieses Dokuments finden Sie auf der Projektseite:

<http://www.preisl.at/brassissima/>

Begleitende Dokumentation zum Projekt / Thema.  
Development, Work, Calculation and Copyright:



(="Brass Instrument Scanning System – Impedance Measurements & Analysis")



Hermann Preisl

Altwaidhofen 45  
3830 Waidhofen/Thaya, Austria

[brassissima@preisl.at](mailto:brassissima@preisl.at)

P.S.: Wer systematische Fehler, Schwachsinn oder falsche Behauptungen findet:

Bitte diese **nicht !!** behalten,  
sondern bitte um kurze Info an mich, das hilft mir sehr weiter, danke!

## Überblick über diesen Projektteil:

In diesem Part des Projektes werden die fundamentalen Unterschiede zwischen rein zylindrischen Resonatoren und konischen Resonatoren (mit und ohne Spitze), bzw. der Übergang von der einen auf die andere Geometrie miteinander verglichen und die Unterschiede bzw. Resultate daraus aufgearbeitet. Ebenso die fundamentalen Unterschiede von beidseitig offenen gegenüber einseitigen geschlossenen Geometrien und welche Veränderungen ein Frustum (Kegel mit nicht vorhandener Spitze) akustisch bedeutet. Speziell wird auf mögliche Frequenzen von Resonanzen und Antiresonanzen eingegangen, ebenso auf Änderungen der Positionen von Druckknoten, Druckbäuchen, sowie Flußbäuchen- und Knoten.

Inhalt Teil 2B:	Seite
Übersicht Grundformen - Zylinder & Konus (mit geschlossener Spitze)	3
Notw. Endkorrektur an offenen Enden & Hinweis auf weitere, teils viel stärkere Effekte	
Cone vs. not Cone =2:1 und eine Frage der jeweiligen Betrachtung	4
Grundformen und deren theor. Eigenschaften, auch in Bezug auf Antiresonanzen:	5
Einseitig geschlossener Zylinder	5
Beidseitig offener Zylinder	7
Schrittweise Transformation offener zu einseitig geschlossenem Zylinder	8
Berechnung Druckverlauf Zylinder, einseitig geschlossen (links)	10
Closed Zylinder – Positionsverhältnisse der Druck-Knoten zueinander:	11
Konus mit Spitze: Berechnung Druckverlauf	12
Konus mit Spitze: Druckverteilung	13
Konus mit Spitze: Positionsverhältnisse der Druck-Knoten zueinander:	14
Frustum open-open (offener Konus mit fehlender Spitze), Druckverlauf:	15
Frustum open-open: Die Positionen der Druckbauchmaxima	17
Frustum closed-open: Berechnung Druckverlauf, Flussmaxima & Frequenzen	19
Resonanzfrequenzen & Versatz der Druckverteilung, Vergleich aller Geometrien	21
Bias© Simulationen:	25
Closed Zyl. vs. Frustum closed-open, beinahe geschlossene Spitze:	25
Closed Zyl. vs. Frustum closed-open, selbes TL Volumen vs. Mensur	27
Closed Zyl. vs. Frustum closed-open, selber Start Dia. vs. Diff. Volumen & Winkel	28
Frustum closed-open:	
Zusammenhänge Druck und Fluß zu Input Impedanz, Addition of Openwind Simulations	30
Impedanzkurve des geschlossenen Zylinders als Referenz	32
Druckknoten / Druck Maxima Positionen entlang der Rohrlänge	35
Ableitung der Druckknoten Positionen anhand der Impedanzkurve	35
Grafische Übersicht Druckverteilung in den verschiedenen Geometrien	39
Tabellen Positionen Druckverhältnisse Closed Zyl. und Konus mit Spitze	43
Closed Zyl. vs. Frustum closed-open, B=0,2 Vergleich Lage Druckknoten/Druckbäuche	44
Zusammenfassung	44

Hinweis auf das parallel vergleichende Kapitel:

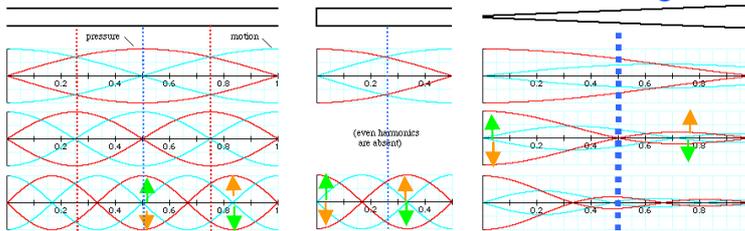
### Teil 2C: Perturbationen an simplen Geometrien: Cylinder closed-open, Frustum closed-open

Übersicht Grundformen - Zylinder & Konus (mit geschlossener Spitze = Apex):

Mögliche stehende Wellen in verschiedenen Rohren und Konus (theoretisch + stark vereinfacht):

$WL = RL * 2 = \text{Press.N.}$

$= RL * 4 = \text{Pr.AN} = \text{Seitenlänge} * 2 = \text{Pressure Antinode}$



Zylinder, beidseitig offen  
kein XM-Pitch, sondern  
1 XM-IN bei 50% und  
2 Magic Spots bei 25+75%

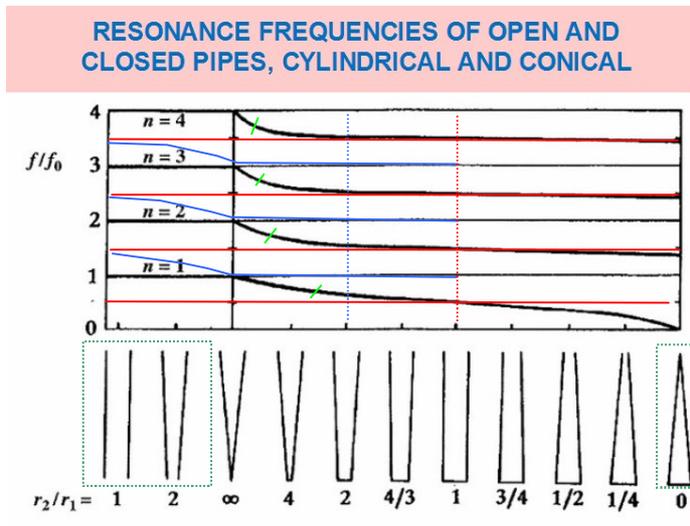
einseitig closed  
XM-PN =  
bei 50%  
Rohrmitte+EC

Konus mit geschlossener Spitze:  
Fluß ist stark versetzt = Minimas!  
XM-IN1+2 vor /nach ~ 50% ausser NT1, XM-PN nach 50%RL  
XM-PN wandert mit Frequenz + je offenem Ende: Endkorrektur!

Versatz Druck zu Fluß = jeweils nach 1/8 WL  
Pitchnodes oder Magnitudenodes (abwechselnd).

Konus mit Spitze: Flussknoten (und Bäuche) = Minima sind  
an der Spitze gedehnt, dann gestaucht, (freq. abhängig)

Hat der Konus mit Spitze (APEX) 1m Seitenlänge, so ist die Wellenlänge des 1. Grundtones 2m lang.  
Dieses gilt allerdings nur für Peak Maxima = Resonanzen, Druckbäuche, denn Minima = Antiresonanzen  
(Flußbäuche/Knoten) sind im engeren Bereich gedehnt, im weiteren Bereich gestaucht; Es gibt also stark  
verzerrte Verhältnisse von Druck zu Fluß, umso tiefer die NT# (Frequenz) liegt.



Hier werden schwarz die Resonanzen zueinander dargestellt, blau sind die Antiresonanzen grob skizziert  
wobei die 2 linken noch offenen Zyl. Minima als Resonanzen und Maxima als Antiresonanzen haben.

Betrachtet man A. closed und B. open Zylinder aus Sicht der Eingangsimpedanz, so haben beide jeweils bei  
gleicher Frequenz A einen Druckbauch = Input Impedanz Maxima, oder aber B einen Druckknoten  
(Impedanz Minima), also wechselseitig Antiresonanzen und Resonanzen bei gleicher Frequenz und Länge.  
Beim Konus mit geschlossener Spitze haben wir das „Problem“, daß es keine Eingangsimpedanz gibt,  
wegen fehlendem Eingang. Minima=Druckknoten am Eingang bleiben immer bei gleicher Frequenz/WL.

Endkorrektur an offenen Enden & Hinweis auf weitere, teils viel stärkere Effekte:

Pro offenem Ende muß eine Korrekturlänge zur physischen Länge hinzugerechnet werden. Diese sollte  
~0,3-0,4 \* des Durchmessers pro offenem Ende betragen und für alle Resonanzen gelten. Schon aus diesem  
Grund kann ein Konus mit Spitze nicht die selben Resonanz-Frequenzen eines beidseitig offenen Zylinders  
haben! Ein Konus bräuchte eine größere Endkorrektur, ebenso ein weites Rohr – was bedeutet, daß eine  
„weite“ Öffnung tiefere Resonanzfrequenzen verursachen würde? -> Weitere Phänomene in langen und  
engen Rohren (z.B. Reibung) haben so starke Effekte, die diese Endkorrektur aber wieder aushebeln. Alle  
theor. Angaben setzen voraus, daß diese notw. Korrekturlänge prinzipiell bekannt & ev. berücksichtigt wird.

## Cone vs. not Cone =2:1 und eine Frage der jeweiligen Betrachtung:

Beim closed-open Zyl. sind die **Antiresonanzen** immer **geradzahlige Vielfache der Grundfreq. =  $\frac{1}{4}$  WL**.  
D.h. shared Minima NT1 zu 2=bei 2\*Grundfrequenz; shared Minima NT2 zu 3 = bei 4\*Grundfrequenz, usw.

Stellt man die Rechnung um, so erhält man fiktive Grundtöne, die auch ein closed Zyl. selber Länge haben würde, d.h. die fiktive äquivalente Länge eines geschlossenen Zylinders = die Länge des Frustum:

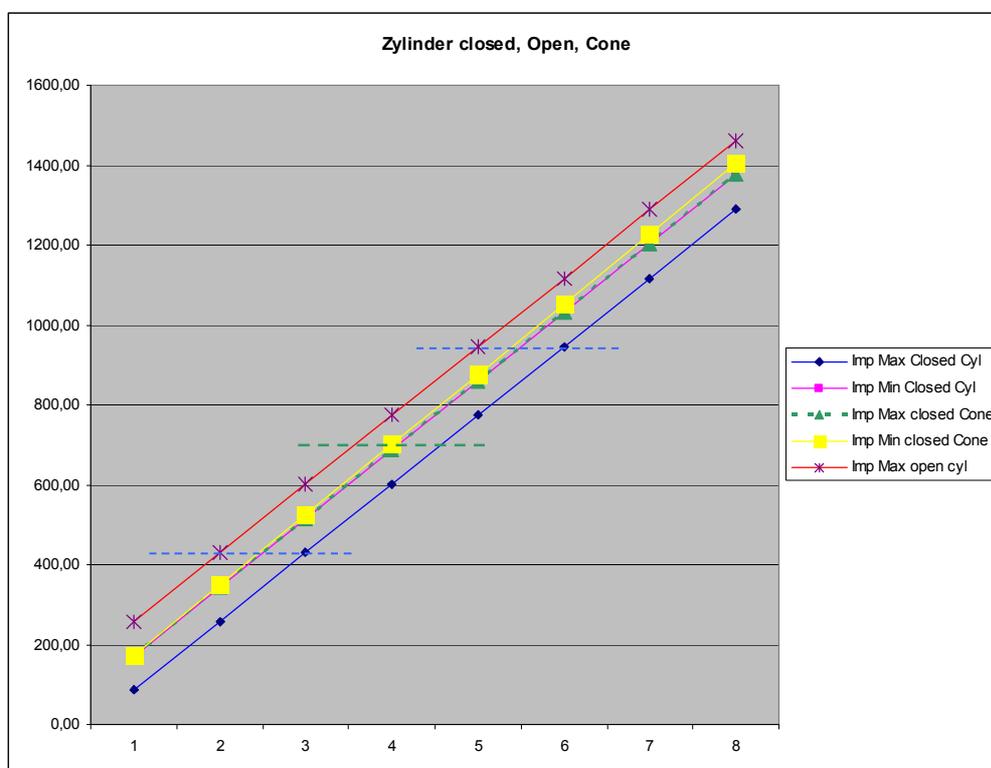
Frusta closed-open & auch cl. Zyl. lt. Bias© = fikt. GT= $\frac{1}{4}$  WL Rohrlänge in m = Speed/(4\*Hz fikt. GT)

shared Minima 1 zu 2 = 84,4 Hz / 2	= 42,20 Hz	2,03 m
shared Minima 2 zu 3 = 169,4 Hz / 4	= 42,35 Hz	2,02 m
shared Minima 3 zu 4 = 254,9 Hz / 6	= 42,48 Hz	2,02 m

usw. **hier** **MW 42,50 Hz** **2,015 m = ~1% zu Berechnung.**

Die Differenzen nehmen mit steigender Frequenz stark ab. Bias© Daten wurden hier manuell abgelesen.

Behauptet man nun, ein geschlossener Konus selber Seitenlänge, oder auch ein beidseitig offenes Rohr hat die selben **Resonanzfrequenzen** wie ein geschlossenes Rohr, allerdings mit Grundton 1 Oktave höher, und Fikt. GT =  $\frac{1}{2}$  WL, ergibt sich die selbe fiktive Seitenlänge eines Konus mit geschlossener APEX/Spitze, Resonanzfrequenzen sind nun dazu vergleichsweise tiefer, je kleiner die Mode # ist.



Impedanz Maxima werden zu Antiresonanzen, sobald 2 Rohrenden offen sind.

Sowohl beim beidseitigen offenen Zylinder, als auch bei einseitig geschlossen Zyl. sind die jeweiligen Abstände von Imp. Maxima zu Minima immer  $\frac{1}{4}$  WL, und die Abstände XM-IN zu XM-PN bei  $\frac{1}{8}$ WL. Beim Konus mit **beinahe** geschlossener Spitze liegen Maxima und folgende Minima extrem aneinander, denn Minima sind (bleiben) an selber Frequenz wie beim einseitig geschlossenen Zylinder.

**Definitionen:** Ein closed-open Frustum ist ein Konus mit fehlender Spitze, also ein „Kegelstumpf“  
Als closed Zyl. wird im folgenden ein Zylinder gemeint, bei dem ein Ende geschlossen ist = closed-open Zyl.  
XM steht folgend für „etwas in der ~ Mitte“,  
PN = Pitchnode = keine Frequenzänderung bei einer lokalen Querschnittänderung = Perturbation).  
IN = Impedanznode = keine Input-Impedanz Magnitudenänderung -,-  
WL= Wellenlänge, RL=Rohrlänge, WI = Wave Impedanz ~ Zchar., Frequ. Crossing = aritm. Mitte Min/Max.  
NT= Naturton bzw. Resonanzmode #

## Grundformen und deren theor. Eigenschaften, auch in Bezug auf **Antiresonanzen**:

(Bei folgenden, vorerst sehr simplen Betrachtungen werden Reibung und Verluste außer Acht gelassen!)  
Die Überlegungen gehen auch davon aus, daß das Verhältnis der Länge zum Querschnitt „sehr“ groß bleibt.  
Zusammenhänge sind jeweils grün für Resonanzen und rot für Antiresonanzen hervorgehoben.

**Wenn die Phasengeschwindigkeit nicht dispersiv ist, das bedeutet sie ändert sich nicht frequenz- und ortsabhängig und ist somit konstant, dann ist die Wellenlänge zur Tonhöhe proportional;**  
Frequenz in Hz = Häufigkeit pro Sekunde = Anzahl Schwingungen /Sek. oder aber  
Periode = Zeit in Sekunden, die 1 vollständige Schwingung benötigt; d.h. 1/Frequenz = Dauer im Sek.  
Hieraus bilden sich die Zusammenhänge zwischen Frequenz und „Resonator“- (Rohr)-Seitenlängen.

**Einseitig geschlossene Zylinder** produzieren stehende Wellen -> **Peakmaxima** (=am effektivsten)  
bei jeweils allen ungeradzahigen Vielfachen eines **Grundtons = tiefste Resonanzfrequenz**.

Grund dafür ist, daß es für das Entstehen der „stehenden“ Welle am geschlossenen Ende ein Druckbauch vorhanden sein muß. „**Antiresonanzen**“ finden sich an jenen Frequenzen, wo am geschlossenen Ende ein Druckknoten entstehen würde, dies ist hier **bei allen geradzahigen** Vielfachen des Grundtones der Fall.  
Das offene Ende erzwingt Druckknoten. Bei Resonanzmode #1 = Grundton, ist das bei einem Viertel seiner Wellenlänge der Fall. Closed-open Zylinder werden daher auch als „Quaterlenght“ Resonatoren bezeichnet.

**Die physische Rohrlänge des Grundtones entspricht hier extremen ¼ bzw. 2/8 der Wellenlänge.**

Hat das Rohr beispielsweise 1,0m Länge, so ist die Wellenlänge des **Grundtones** dann 4,0m (4\*so) lange.  
1/4 bzw. 2/8 bzw. 25 % der 1. Resonanz=Grundschiwingung „passen“ in das einseitig geschlossene Rohr.

Bei einer Schallgeschwindigkeit von z.B. 344 m/Sek sind das  $\frac{1}{4} m * 344m = 86 \text{ Hz}$  für die 1. Resonanz.  
Ist die (ev. fiktive) GT Frequenz bekannt, so ist die effektive phys. Rohrlänge dann  $344 / 86 \text{ Hz} / 4 = 1,0 \text{ m}$ ,  
da Speed / Wellenlänge = Frequenz. Als nicht dispersive Proportionalitätsformel gilt:  $k^2 = w^2 / c^2$ ,  $k=w/c$ ,  
 $k = \text{Kreiswellenzahl} = 1 / \text{Wellenlänge} * 2\pi$ ,  $w = \text{Kreisfrequenz} = \text{Frequ.} * 2\pi$ ,  $c = \text{Phasengeschwindigkeit}$ ,  $2\pi$   
steht hier für 1 Schwingung = 1 Kreisumdrehung = 6,28rad.

Alle Hz Abstände zwischen **Maxima** und **Minima** sind hier immer  $\frac{1}{4}$  **Wellenlänge des Grundtons**. = 86 Hz.  
Die Wellenlänge nimmt reziprok mit aufsteigender Frequenz gleichmäßig ab, für **Peaks** als auch für **Minima**.

Das geschlossene Ende erzwingt einen Druckbauch und das offene Ende einen Druckknoten.

Daraus ergibt sich:

ungeradzahlig Vielfache der Grundfrequenz liefern Resonanzfrequenzen.  $f=(2n-1)*\text{Speed} / 4 \text{ RL}$ ,  $n=1,2,3..$   
geradzahlig Vielfache der Grundfrequenz liefern Antiresonanzfrequenzen,  $f=m*\text{Speed} / 4 \text{ RL}$ , mit  $m=2,4,6..$

Die jeweilige Wellenlängen von Resonanzfrequenzen im closed-open Zylinder ergeben sich anhand  
 $1 \text{ Wellenlänge} = 4 \text{ RL} / (2n-1)$ , und  $\frac{1}{4} \text{ Wellenlängen} = \text{RL} / (2n-1)$

Es bilden sich  $(2n-1)$  Druckbäuche und  $(2n-1)$  Druckknoten im Abstand von  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge des Modes,  
folglich beträgt der Abstand zwischen Druckknoten  $\frac{1}{2}$  Wellenlänge, ebenso zwischen Druckbäuchen.

Anhand Temp:>Speed /4*Rohrlänge: # * GT	=RL/#=1/1 WL /8=1/8WL	/RL=Anz.	XM-PN nach TL	Anz. ~
Der 1. Peak ist die tiefste Resonanz	1 86Hz =4m/1 = 4,00m =50,0cm	2 (von 8)	1 von 2	0,25
Das folgende Minima (1.Antiresonanz)	2 172Hz =4m/2 = 2,00m =25,0cm	4 (von 8)	2 von 4	0,50
Der 2. Peak = 2. ungerade	3 258Hz =4m/3 = 1,33m =16,6cm	6 (von 8)	3 von 6	0,75
Das folgende Minima (2.Antiresonanz)	4 344Hz =4m/4 = 1,00m =12,5cm	8 (von 8)	4 von 8	1,00
Der 3. Peak = 3. ungerade	5 430Hz =4m/5 = 0,80m =10,0cm	10 (+2)	5 von 10	1,25
Das folgende Minima (3.Antiresonanz)	6 516Hz =4m/6 = 0,66m =8,25cm	12 (+4)	6 von 12	1,50
<b>Hz * 1/8WL in m = Hz von 1/8WL GT, hier 43Hz*8=344m WL=Speed of Sound!</b>			<b>XM-PN =bei 50%RL</b>	

### XM-Pitch Nodes:

Beim closed-open Zylinder finden sich bei 50% Rohrlänge Pitch-Nodes für Peaks (Resonanzen),  
was bedeutet, daß eine kurze lokale Querschnittänderung die Resonanzfrequenzen nicht abändert.

**Peak = Resonanz-Magnitude-Nodes** finden sich hier an Positionen im Rohr, wo Druckbäuche ihr Maximum haben und an Druckknoten. Hier ändert eine lokale Querschnittsänderung die Tonhöhe (WL) der jew. Resonanzfrequenz, aber nicht deren Magnitude. **XM-IN1 und XM-IN2** sind 1/8 WL vor und nach XM-Pitch. Ungeradzahlige **Resonanzen** haben bei **XM-IN1** (=auf der geschlossenen Seite vor Rohrmittle) **Druckbäuche**, geradzahlige **Resonanzen** **Druckknoten**. 1/8WL nach XM-Pitch sind die Druckzustände umgekehrt.

lokale Verengung bei **Druckbauch (Peak): Resonanz** nun bei höherer Frequenz, (=raises Pitch)  
bei **Druckknoten (Peak): Resonanz** nun bei tieferer Frequenz, (=lowers Pitch)

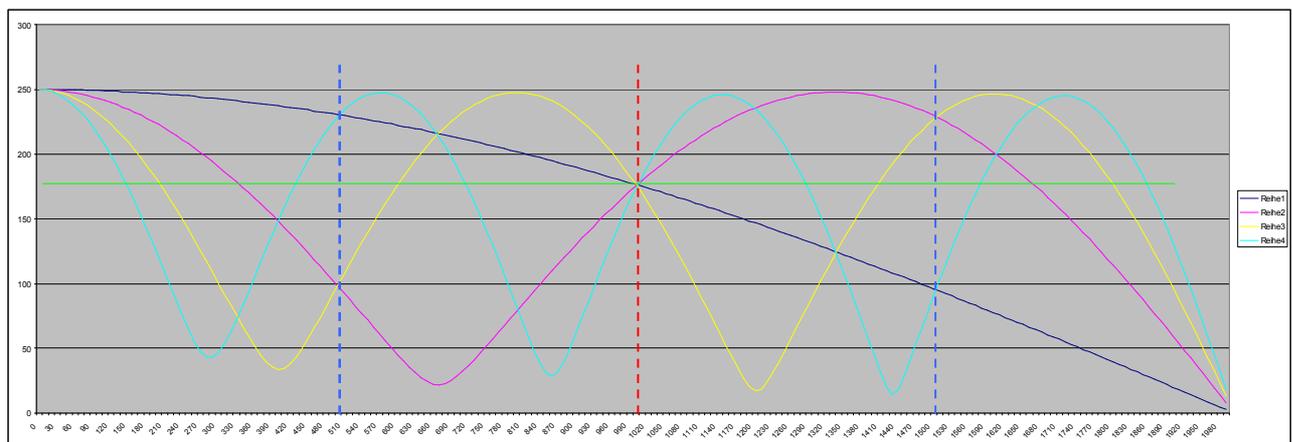
Ungeradzahlige **Antiresonanzen** (= odd/even Peak shared) haben bei **XM-Pitch: Druckbäuche (Pitch raised)**  
Geradzahlige **Antiresonanzen** (= even/odd Peak shared) haben bei **XM-Pitch: Druckknoten (Pitch lowered)**  
d. h. Antiresonanzen verhalten sich bei Perturbationen bezogen auf Frequenzen gleich wie Resonanzen.

**Antiresonanzen haben nur 1 shared XM-IN Pos (=bei 50% RL), wo Resonanzen XM-Pitch-N haben. Dafür haben Antiresonanzen 2\*eine „XM-PN“ Position, 1/8WL vor und nach ihrer XM-IN (=50% RL)**

Constriction 1/8WL vor Rohrmittle: odd/even shared Minima: Magnitude der **Antiresonanz** höher (schwächer) (links geschlossen) even/odd shared Minima: Magnitude der **Antiresonanz** niedriger (stärker)

Constriction 1/8 WL nach Rohrmittle: odd/even shared Minima: Magn. der **Antiresonanz** niedriger (stärker) (links geschlossen) even/odd shared Minima: Magn. der **Antiresonanz** höher (schwächer)

**Resonanz Pitchnodes = Frequenz Crossings = Wave Impedanz Crossings (Geomittel Peak zu Dip) = kein Versatz Pitch Node zu Magnituden- Node Positionen an der physikalischen Achse, sondern immer 1/8 WL. (Der Abstand vor und nach einem Peak zu den shared Minimas ist immer 1/4 WL.)**



Simulation Druckverlauf einseitig (links) geschlossener Zylinder, **Länge 2000mm**, Diameter 10mm, (Bios©) Anzeige der 4 untersten **Resonanzfrequenzen** = ungerade Vielfache der Grundfrequenz mit  $WL=RL*4$  Der Grundton beträgt hier 43 Hz für **2m** Rohrlänge. 50% RL = shared XM-Pitch bei 0,7071 Press. Magnitude (Wurzel aus 1/2) = 1/8WL von Druckbäuchen entfernt. Bei 25% RL & 75% RL bilden sich "Magic Spots".

**XM-PN = Peak Pitch Node XM Position: Pitch Start Pos hier links bei 0 + ((NT#\*2-1) \* 1/8 WL)**

**XM-IN: Die Mitte ist hier extrem zum (linken) geschlossenen Rohrstart gewandert (<-1/8WL!)**

Dies bedeutet, exakt in der Mitte können alle Resonanz Impedanz-Magnituden beeinflusst werden, Frequenz/WL aber kaum. Andere Frequenzen = abweichende Impulsanzahl über die Zeit, als oben genannt werden in die jeweilige Richtung abweichende Ergebnisse / Zustände liefern.

Würde man das Rohr auch an der 2. noch offenen Seite vollständig verschließen, (z.b. eine Membran /Trommelfell. o.ä.), so wären die Antiresonanzen mit den Resonanzen bei selber Frequenz vertauscht. Ergibt alle Harmonischen des Grundtones, da nun gerade Vielfache. (Hier aber keine Endkorrektur!)

Es gibt beim einseitig geschlossenen zylindrischen Rohr keine gemeinsamen **Resonanz Magnitude-Node** Positionen, mit Ausnahme an beiden Enden, dafür exakt in der Mitte gemeinsame **Pitchnodes bei 50% RL**. Alle **Antiresonanzen** würden aber bei gleicher Frequenz als **Resonanzen (Minima)** in einem doppelt so langen, offenen Rohr vorkommen. Trennt man ein doppelt so langes Rohr in der Mitte durch und verschließt es hier (die linke Hälfte wird entfernt), so ergeben sich die voran genannten akustischen Merkmale.

**Zylindrisches Rohr, beidseitig offen, hier selbe Seitenlänge:**

Im Gegensatz zu einem einseitig geschlossenen Rohr passen in ein beidseitig offenes Rohr  $\frac{1}{2}$  Wellenlänge, damit die Bedingung erfüllt ist, dass es 1x einen Druckbauch für den Grundton gibt, nun aber in der Mitte, und jede Resonanz hat einen Druckknoten mehr (+1 Loch) als Druckbäuche!

Die unterste mögliche Resonanz = Grundton eines beidseitig offenes Rohr ist um 1 Oktave höher = doppelt so viele Schwingungen/Sek. bzw. halbe Rohrlänge bzw. Periode/2; so gesehen sind auch geradzahlige Vielfache des doppelt so hohen Grundtones - nun aber immer als Impedanzminima möglich. Exakt dazwischen sind aber nun Input - Impedanzmaxima, an denen keine Resonanz stattfindet! Offene Zyl. haben Druckknoten an beiden offenen Enden = 2 x Endkorrektur notwendig!

Hat das Rohr 1m Länge, so ist die Wellenlänge des 1. mögl. Grundtones=Impedanz Minima=2m= $\frac{1}{2}$  WL.  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$  Wellenlänge der Grundschiwingung „passen“ in das beidseits offene Rohr. Bei Geschwindigkeit z.b. 344 m/Sek. sind das  $344 / (2*1m) = 172$  Hz für den Grundton. Ist die (ev. fiktive) GT Frequenz bekannt, so ist die effektive phys. Rohrlänge dann  $344m/172 \text{ Hz}/2=1,0m$ .

Das 1. Minima = 1. ungerade # = 1 ist der Grundton, die tiefste Resonanzfrequenz = 2m WL.	172Hz
Das folgende (odd /even shared) Maxima # = 1,5 2m /1,5 = 1,33m	273Hz
Das 2. Minima = 1. gerade # = 2 hat somit eine Wellenlänge von 2m /2= 1m	364Hz
Das folgende (even/odd shared) Maxima # = 2,5 2m /2,5 = 0,8m	455Hz
Das 3. Minima = 2. ungerade # = 3 hat somit eine Wellenlänge von 2m /3= 0,67m	516Hz

Die Abstände der Resonanzen sind  $\frac{1}{2}$  WL, d. h. alle Abstände zwischen Resonanz-Minima und Anti-ResonanzMaxima sind auch hier  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge GT entfernt. Resonanzen können sich nur in solchen Konstellationen bilden, die an beiden Enden Druckknoten beinhalten, d.h. exakt in der Mitte entweder Druckbäuche (geradzahlige Resonanzen) oder Druckknoten (ungeradzahlige Resonanzen) =XM-IN sind. Die beiden Hälften halten sich durch ihr gleiches Potential zu beiden Seiten im Gleichgewicht.

Anhand Temp:>Speed /4\*Rohrlänge: # \* GT =RL/#= $\frac{1}{1}$  WL /8= $\frac{1}{8}$ WL /RL=Anz. XM-IN nach TL Anz. ~

Das 1. Min. ist die tiefste Resonanz	1	172Hz =2m/1 = 2,00m =25,0cm	4 (von 8)	2 von 4	0,5
Das folgende (odd/even shared) Max	1,5	258Hz =2m/1,5 =1,33m =16,63	6 von 8	3 von 6	0,75
Das 2. Min.	2	344Hz =2m/2 = 1,00m =12,5cm	8 (von 8)	4 von 8	1,0
Das folgende (odd/even shared) Max	2,5	430Hz =2m/2,5 =0,80m =10,0	10 von 8	5 von 10	1,25
Das 3. Min.	3	516Hz =2m/3 =0,67m = 8,38cm	12 (von 8)	6 von 12	1,5

Hz \*  $\frac{1}{8}$ WL in m = Hz von  $\frac{1}{8}$ WL GT, hier  $43\text{Hz} * 8 = 344\text{m}$  WL=Speed of Sound! =bei 50%RL

Imp. Minima und Maxima sind Magnitude-Nodes. (Abstand je 2\* der  $\frac{1}{8}$  WL Grundfrequ. zueinander). Pressure und Flußzustände bilden im  $\frac{1}{8}$  WL Frequenz-Abstand dazwischen Resonanz Pitch-Nodes. dh bei Frequenzen  $1,25 * \frac{1}{4}$  WL, bei  $1,75 * \frac{1}{4}$  WL, bei  $2,25 * \frac{1}{4}$  WL usw.

Man kann die Rechnung wie folgt erweitern und umstellen:  
 $344 / (1m * 8) = 43\text{Hz}$ . reziprok =  $\frac{1}{8}$  Die unterste Resonanz (Minima) wird 4 \* diese Frequenz haben

	Antiresonanz	Grenzen	Resonanz
An offenen Enden:	Druckbäuche n. mögl.		2 x Druckknoten
In der Mitte = bei XM:			Ungerade #: Druckbäuche = XM-IN
In der Mitte = bei XM:			Gerade #: Druckknoten = XM-IN
			1. Minima 43Hz * 4 = 172Hz
		Pitchnode 43Hz * 5 = 215 Hz = arithm. MW Frequ.	
Maxima NT1 zu NT2	43Hz * 6 = 258Hz		
		Pitchnode 43Hz * 7 = 301 Hz	
		2. Minima 43Hz * 8 = 344 Hz	
		Pitchnode 43Hz * 9 = 387 Hz	
Maxima NT2 zu NT3	43Hz * 10 = 430Hz		
		Pitchnode 43Hz * 11 = 473 Hz	
		3. Minima 43Hz * 12 = 516Hz, usw.	

Es gibt keine gemeinsame XM-Pitch Node Pos., dafür in der Mitte (50% RL) gemeinsame Magnitude-Nodes. Dies bedeutet, exakt in der Mitte (XM-IN) kann die Stimmung beeinflusst werden, Magnituden kaum. Gerade und ungerade Resonanzen werden abwechseln höher oder tiefer – je nach Perturbation. ODD: NT1,NT3,NT5,NT7=Druckbauch, Constr. raises; Even:NT2,NT4,NT6,NT8=Druckknoten, constr. lowers

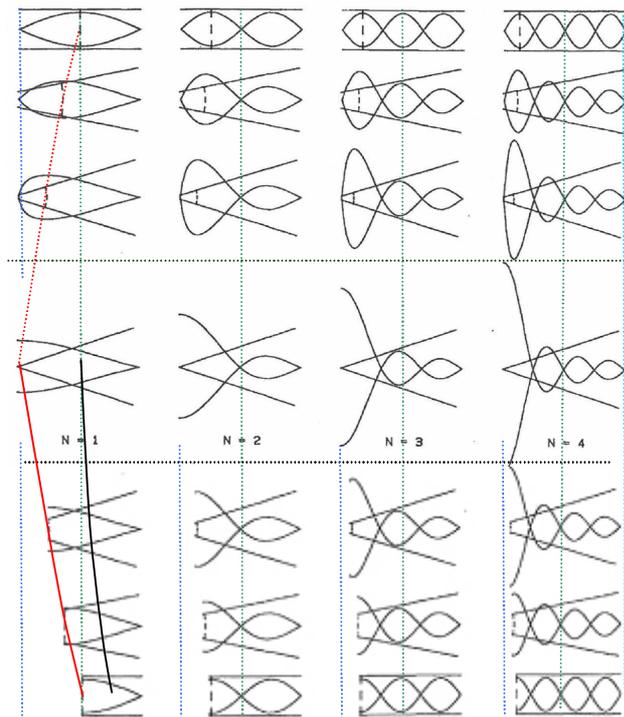
## Schrittweise Transformation offener zu einseitig geschlossener Zylinder, Part #1

Hier ist der korrespondierende geschlossene Zylinder in der Länge passend angepasst:

Abschnitt oben: offener Zylinder zu Kegelstumpf mit offenen Enden

Abschnitt Mitte: Konus mit (links) geschlossener Spitze

Abschnitt unten: Kegelstumpf geschlossen am kleinen Ende zu einseitig (links) geschlossenem Zylinder  
strichliert helblau: Druckknoten; rot bzw. schwarz strichl. : 1. Druckbauch pro Resonanz, grün: Mitte = XM-IN;



1/2 1/4 1/6 1/8 kürzere Rohrlänge für selbe Freq.

**Pure closed Cyl: XM-Pitch bei 50%, but 50% RL for same Freq. = 1/2 RL missing, dafür WL \* 2/1 !**

Hier wurde der untere Teil = nach Konus zu völligem Aufweiten zu einen einseitig geschlossenen Zylinder grafisch angepasst, daß die Rohrlängen die gleichen Resonanzfrequenzen als ein Konus ergeben würden.

Hier stimmen die Veränderungen vor und nach der Mitte (XM) für PEAKS (Pressure) nicht mehr überein. D.h. Peaks = Resonanzen sind nicht mehr im  $\frac{1}{4}$  WL Abstand eines gemeinsamen Grundtones, dies liefert daher keine harmonisch Vielfachen einer Grundfrequenz; die dazu erforderlichen Rohrlängen (blau) fehlen.

Dennoch werden diese **Grundformen** für viele Instrumente (Saxophon, Fagott, Alphorn, etc. verwendet), indem am geschlossenen Ende noch ein Mundstück als korrigierendes Volumen angebracht wird (**welches das Volumen der fehlenden Spitze teilweise ? ->(MPC Kessel Vol. ->ersetzt)**), ebenso ein Schalltrichter...

Peak Maxima WL ändern sich durch das Aufweiten im Vergleich zum geschlossenen Konus wie folgt:

Peak	N1 1:2	N2 3:4	N3 5:6	N4 7:8	usw.
Cl. Cyl. Freq. Ratio	= 0,5	=0,75	=0,83	=0,875	compared to Cone/Open Cyl.
Cl. Cyl. Wave L. Ratio	x 2,0	x 1,33	x 1,20	x 1,14	-, -

**Die Peak Resonanzen verschieben sich vom cl. Zyl. zum Konus (im Extremfall) um jeweils  $1 * \frac{1}{4}$  WL, wenn der Peak am nächst höheren Minima landen würde:**

NT1: 1 auf  $2(*\frac{1}{4})$ , NT2: 3 auf 4 NT3: 5 auf 6 NT4: 7 auf 8, NT5: 9 auf 10, NT6 11 auf 12

Die **Druckknoten** verschieben sich im Extremfall genauso um max.  $\frac{1}{4}$  WL (1. Knoten am kleinen Ende, Mode #1) Richtung großes Ende, mit selber abnehmender Rate, ihre **Abstände** zueinander sind jeweils gleich und **bestimmen die Resonanzfrequenz**. Auch Druckbäuche verschieben sich, durch die Geometrie bleiben deren Maxima aber weiter Richtung kleines Ende. **Druckbauch Maxima** Positionen bleiben Flußknoten und bestimmen max. Pitch-Änderungs-Potential, bei höheren Moden auch Magnitude-Nodes. Druckknoten bleiben Flußbäuche, haben aber nicht mehr max. Pitch Pot., dieses liegt annähernd mittig zwischen Druckbäuchen.

## Schrittweise Transformation offener zu einseitig geschlossener Zylinder, Part #2

->Hier ist der dargestellte, links geschlossene Zylinder in seiner Länge nicht verändert:

strichliert blau: Druckknoten; schwarz/rot: der 1. Druckbauch pro Resonanz, grün: Mitte 50 % RL;

### Abschnitt oben: offener Zylinder zu Kegelstumpf mit offenen Enden

Input Impedanz ist hier links, am kleiner werdenden Ende betrachtet:

Resonanzfrequenzen bleiben = Imp. Minima, = Druckknoten, (bei open Cyl., beidseitig offener Konus)

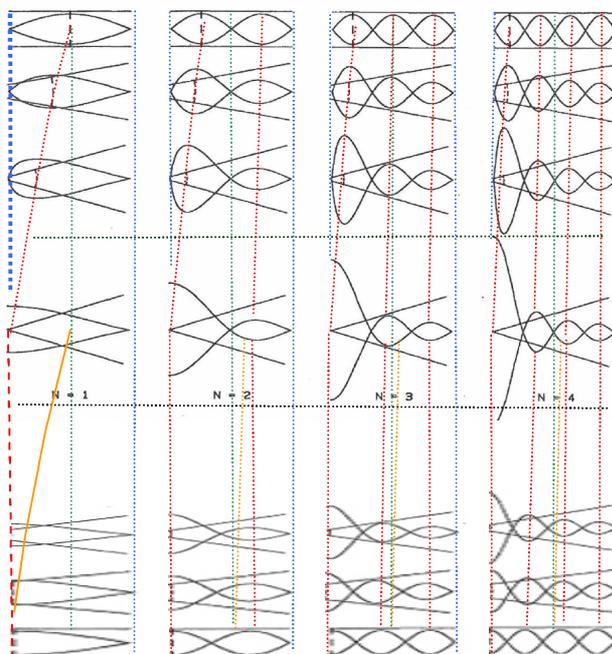
2/4 WL= Resonanz  $N2*1$   $N2*2$   $N2*3$   $N2*4$ , usw. ( $N1$  = missing here)

Antiresonanzfreq.->Frequ. down = Imp. Maxima, spez. 1. Druckbauch Max. (rot) wird fast 1/4 WL nach unten verschoben...= Richtung links engerer Eingang, WL Abstd. Druckbäuche werden länger, wir messen hier vom offenen Ende rechts, bzw. Mitte 50% Seitenlänge = welche sich nicht ändert.

### Abschnitt Mitte = Übergangsmoment/Modewechsel: = jetzt Konus mit (links) geschlossener Spitze

beim geschlossenen Konus ersetzt dieses nun 1/4 WL verschobene Druckbauchmaxima (nun am Beginn) das Imp. Min. bei selber Frequenz. (1. Druckknoten ist eingeebnet, das Loch links existiert nicht mehr.)

Grün = XM-IN bei 50 % Rohrlänge, wobei bald Druckbäuche (=Resonanzen) stärker nach unten =tiefer Frequenz als offener Zylinder =größere WL versetzt werden, Druckknoten aber nicht. (von rechts nach links). Druckbäuche=nun Resonanzen haben größere Abstände Richtung enger werdendes Ende (links)=Versatz.



Cone: GT =  $4*1/8WL$  XM-IN vor und nach 50%RL\*\*  
XM-PN: 50% -> + Versatz -->

between: GT = ( zwischen 2 und 4 ) \* 1/8 WL \*\*

between: XM: Versatz XM-IN u. XM-PN zu 50% RL \*\*

Cl. Cyl: GT= $2*1/8$  WL, XM-PN =XM-at 50% RL

blau/rot: XM-IN:=1/8 WL vor/nach XM-PN at 50% RL

$N1 = 2/8$  WL Unterschied = 1 Oktave

Resonanzfrequenzen sind = Imp. Maxima = Druckbäuche, sobald das linke Ende geschlossen bleibt.

Druckbäuche=nun Resonanzen werden weiter zu tieferen Frequenzen wandern, nun aber als stark erhöhter Mode -1N (aus  $N2$  wird  $N1$ ) = Mode- / Oktav-Sprung

Antiresonanzfrequ. sind = Imp. Minima = Druckknoten am Input, diese bleiben weiter an ihrer Frequenz!

1/4 WL = Antiresonanz bei  $N1*2$   $N1*4$   $N1*6$

### Abschnitt unten: = Kegelstumpf geschlossen am kleinen Ende zu (links) geschlossenem Zylinder

Impedanz Minima werden sich durch das Aufweiten nicht in ihrer Position =WL=Frequz. verschieben und bilden schon hier wie auch am links geschlossenen, puren Zylinder exakt geradzahlige Vielfache der 1/4 Resonanz Grundfrequenz eines links geschlossenen Zylinders.

Im Vergleich zum closed Cyl. sind Resonanzen nun stark in Frequenz überhöht (1 Oktave bei GT)

kurz vor dem jeweiligen Minima und bilden dadurch sichtbar scharfe und steile abfallende Flanken nach den „Peaks“. Umso kleiner die Mode Nummer, umso stärker wirkt sich der Frequenzversatz aus.

1/4 WL= Resonanz bei  $N1*1++++$  (1,9)  $N1*3+++$   $N1*5++$   $N1*7+$  usw.

Resonanzen = Imp. Maxima werden durch das Aufweiten stark, beim vollständigem Aufweiten bis zu 1 Oktave tiefer (Grundton). D. h. die WL der Resonanzen=Imp. Maxima werden beim GT doppelt so lange.

Closed Cyl.: Resonanzfrequenzen sind = Imp. Maxima, = Druckbäuche am Input,

1/4 WL= Resonanz bei  $N1*1$   $N1*3$   $N1*5$   $N1*7$  usw.

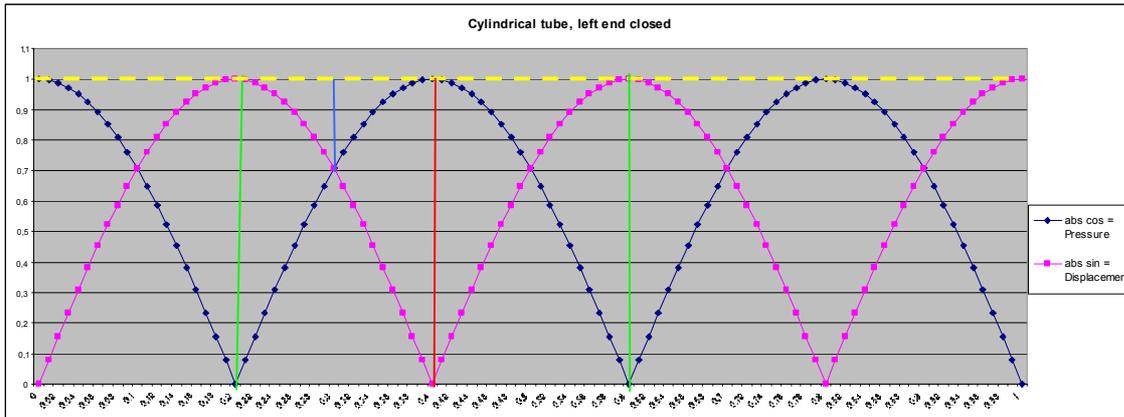
Antiresonanzfrequ. sind = Imp. Minima = Druckknoten am Input,

1/4 WL = Antiresonanz bei  $N1*2$   $N1*4$   $N1*6$  (= arithm. Mitte zwischen Imp. Peaks)

Berechnung Druckverlauf Zylinder, einseitig geschlossen (links)

Um eine ganze Schwingung auf einer Skala von 100 unterzubringen, benötigt man  $360 \cdot 1$  Grad, d.h. 100 Werte mit jeweils 3,6 Grad. Sinus und Kosinus sind 90 Grad versetzt. Antiresonanzen zwischen Resonanzen sind daher immer  $90 \text{ Grad} = 1/4 \text{ Wellenlänge}$  versetzt. Pi entspricht 180 Grad.  $2 \cdot \text{Pi} = 360 \text{ Grad}$  oder 6,28 Radiant, das ist im Bogenmaß der Winkel einer ganzen Kreisumdrehung (Schwingung).

Resonanzfrequ:  $f(n) = ((n^2)-1) \cdot v / 4 \cdot L$  Antiresonanzen=  $\text{even} \cdot v / 4 \cdot L$  n= Mode #, v=Speed of Sound  
 Druckverlauf  $p(x) = \text{abs cos} \{ 2 (2n-1) \pi (x/4L) \}$  für Frequ. mit max. Resonanz (Werte in Radiant)  
 Flussverlauf  $f(x) = \text{abs sin} \{ 2 (2n-1) \pi (x/4L) \}$  -" L = x \*1,0



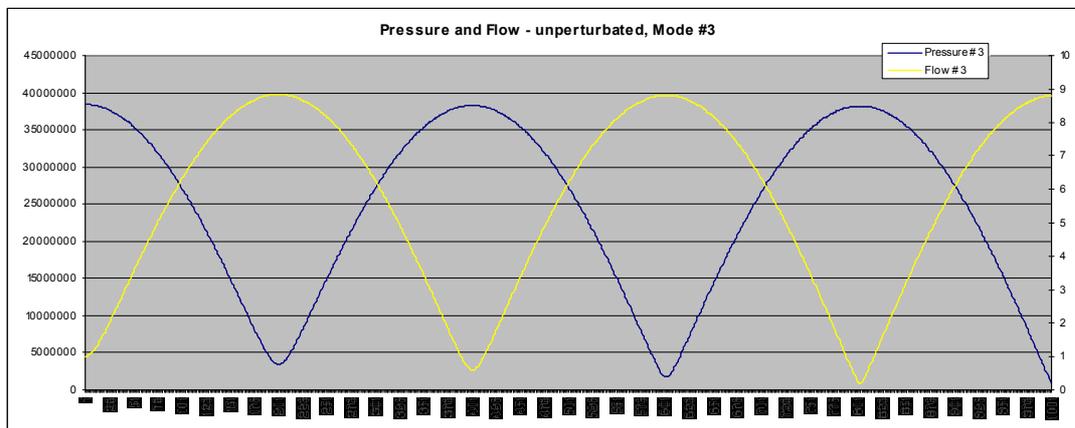
Mode #3

Druck Knoten bei 0,2 und 0,6: *arithm. Mittelwert = 0,4* *arithm Mittelwert aus 0,4 und 0,2 = 0,3*,  $1/8 \text{ WL} = 0,1m$ .

Mode #3 im geschlossenen Zylinder: Um  $5/4$  Schwingungen auf einer Skala von 100 unterzubringen, braucht man 100 Werte mit einer Schrittweite von  $360 \cdot 1,25 / 100 = 4,5 \text{ Grad}$   
 Da am offenen Ende immer ein Druckknoten ist, muß sich bei Frequenzen zwischen Resonanz und Antiresonanzen der Startwinkel von 0 oder 90 Grad entsprechend verändern.

Resonanzen entsprechen ganzen Mode # (1,2,3, usw.),  $\pm 180 \text{ Grad} = 1/2 \text{ WL}$ , Druckbauch am Beginn = 1  
 Antiresonanzen sind  $\pm 90 \text{ Grad} = 1/4 \text{ WL}$  Druckknoten am Beginn = 0  
 bei Werten Mode #  $\pm 0,333$  ist der Druck exakt die Hälfte ( $\pm 60 \text{ Grad}$ ) = Druck-Max. \* 0,5  
 bei Werten Mode #  $\pm 0,250$  ist der Druck exakt das Geometrie von 1 und 0,5 = Druck-Max. \* 0,7071  
 Dieser Wert entspricht  $1/8 \text{ WL}$  Abstand bzw.  $\pm 45 \text{ Grad}$  bzw. Frequ. Crossing arithm. Mitte Min to Max.

Druck- und Flußverlaufskurven aus Simulationen beim Zylinder sehen allerdings anders aus; es gibt eine charakteristische Impedanz des Rohres, Druckknoten sind daher niemals 0, es gibt Verluste, es gibt eine exponentielle Abschwächung, es gibt eine Längenkorrektur am offenen Ende (komplexe Radiation Impedanz), das Verhältnis Durchmesser zu Länge (Volumen) ist hier noch nicht definiert, etc.



Pressure & Flow Distribution, Openwind Simulation, closed-open Cylinder, Length = 1000mm, Dia 11mm.

**Closed-open Zylinder – Positionsverhältnisse der Druck-Knoten zueinander:**

Das Positionsverhältnis der Knoten zueinander ist der Reziprokwert der Position Rohrlänge, d.h.

**Mode2 = 3/1** der letzte **Knoten 2** wird bei **3\*0,33 (=1/3)** sein, Knoten 2 hat selbes Ratio zu Knoten 1!  
 d.h. letzter Kn. #2 bei  $3/1 * 1/3 = 1,0$   
 1. Knoten(=vorletzter) bei  $1/1 * 1/3 = 0,33 = /3,0$

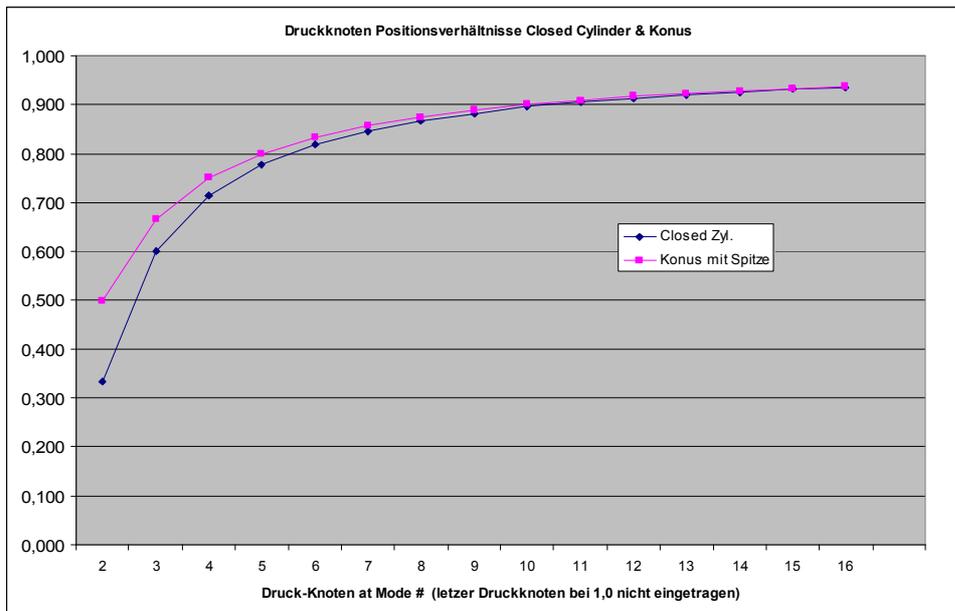
**Mode3 = 5/3** der letzte **Knoten 3** wird bei **1,66\*0,6 (=3/5)** sein, Knoten 3 hat selbes Ratio zu Knoten 2!  
 dh. letzter Kn.#3 bei  $5/3 = 1,666 * 3/5 = 1,0$   
 2. (=vorletzter) bei  $3/3 = 1,0 * 3/5 = 0,6 = /1,66=0,6 = /1,666$   
 der erste bei  $1/3 = 0,33 * 3/5 = 0,2 = /0,6/3=0,2 = /3,0$

**Mode4 = 7/5** der letzte **Knoten 4** wird bei **1,4\*0,714 (=5/7)** sein, Knoten 4 hat selbes Ratio zu Knoten 3!  
 dh letzter Kn.#4 bei  $7/5 = 1,4 * 5/7 = 1,0$   
 3. (vorletzter) bei  $5/5 = 1,0 * 5/7 = 0,714 = /1,40$   
 Knoten #2 bei  $3/5 = 0,6 * 5/7 = 0,428 = 0,714/0,428 = /1,666$   
 Knoten #1 bei  $1/5 = 0,2 * 5/7 = 0,1428 = 0,428/0,1428 = /3,0$

**Mode5 = 9/7** der letzte **Knoten 5** wird bei **1,285\*0,744 (=7/9)** sein, Kn. 5 hat selbes Ratio zu Knoten 4!  
 dh letzter Kn.#5 bei  $9/7 = 1,285 * 7/9 = 1,0$   
 4. (vorletzter) bei  $7/7 = 1,0 * 7/9 = 0,744 = /1,0,744 = /1,285$   
 Knoten #3 bei  $5/7 = 0,714 * 7/9 = 0,531 = 0,744/0,531 = /1,40$  usw.

Faktoren Positionen Druckknoten beim Closed Cylinder, vom jeweils nächsten Knoten,

0,333 0,600 0,714 0,778 0,818 0,846 0,867 0,882 0,895 0,905 0,913 0,920 0,926 0,931 0,935  
 3,000 1,667 1,400 1,286 1,222 1,182 1,154 1,133 1,118 1,105 1,095 1,087 1,080 1,074 1,069 0,000  
 2. Zeile: reziprok: der nächste Druckknoten wird x-fach soweit entfernt sein; Start mit Mode #2, Knoten #1



Beim Closed Cyl. hat jeder Druckknoten selbst ein fixes Positionsverhältnis zu Druckknoten davor oder danach. Am einfachsten ist die Betrachtung vom offenen Ende (hier ist immer der letzte Knoten) rückwärts:

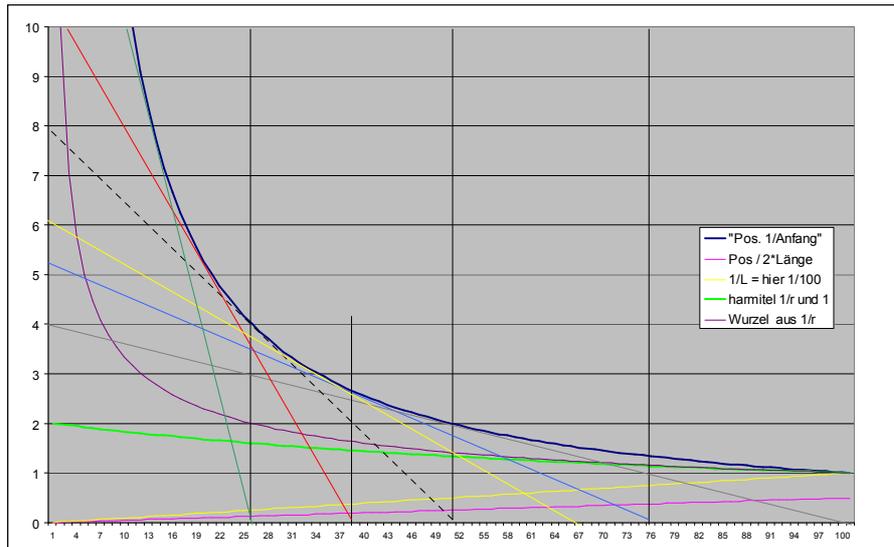
Mode #2 hat 2 Druckknoten; den letzten am Ende bei RL 1,0 und einen zuvor bei Knoten #2  
 Position Knoten#1 =  $1,0 * 0,33$ .

Mode #3 hat 3 Druckknoten; den letzten am Ende bei RL 1,0 und einen zuvor bei Knoten #2  
 Position Knoten #2 =  $1,0 * 0,6 = RL * 0,6$   
 Der restliche 1. Druckknoten hat zum Knoten #2 wiederum Faktor 0,33 -> aber nun von der Pos. Knoten#2:  
 Position Knoten#2 =  $0,6 * 0,333 = RL * 0,2$  usw.

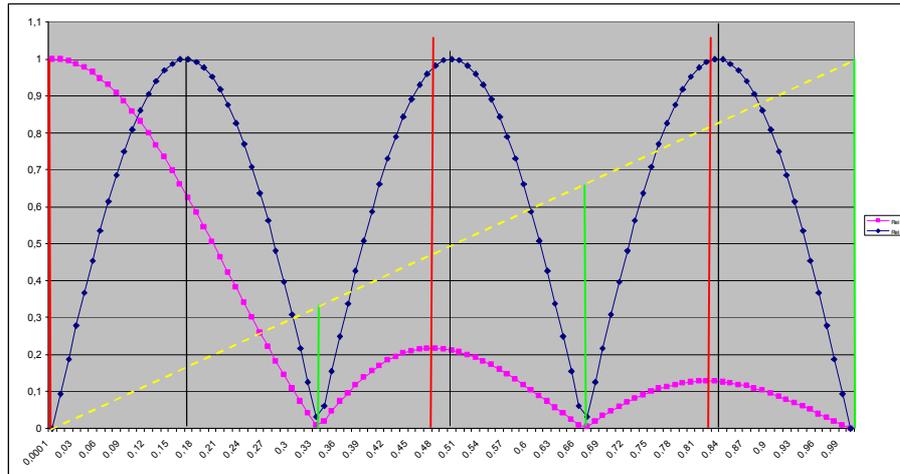
**Berechnung Druckverlauf Konus mit vorhandener, vollständiger Spitze:**

Resonanzfrequenzen  $f(n) = n \cdot v / 2 \cdot L$  mit  $n = \text{Mode \#}$ ,  $v = \text{Speed of Sound}$   
 Druck  $p(x) = (1/x) \cdot [\text{Abs sin} \{ 2 n \pi (x/2 \cdot \text{Länge}) \}]$  Werte sind in Radiant (Bogenmaß).

wobei  $x = \text{Faktor Entfernung von der Spitze, (nicht Radius)}$   
 Die Rechnung ist dimensionslos, der Flankenwinkel verändert die Verhältnisse zueinander hier nicht.



der Faktor  $1/x$  (blau) ist für die Änderungen gegenüber einem Zyl. mit 2 offenen Enden verantwortlich  
 bei 12,5% RL Faktor 8, bei 25% RL Faktor 4, bei 50 % Faktor 2, Faktor 1 bei 100 % RL  
 =  $1/8 = *8$      $1/4 = *4$      $1/2 = *2$      $1/1 = *1$     Positionsfaktor zu RL



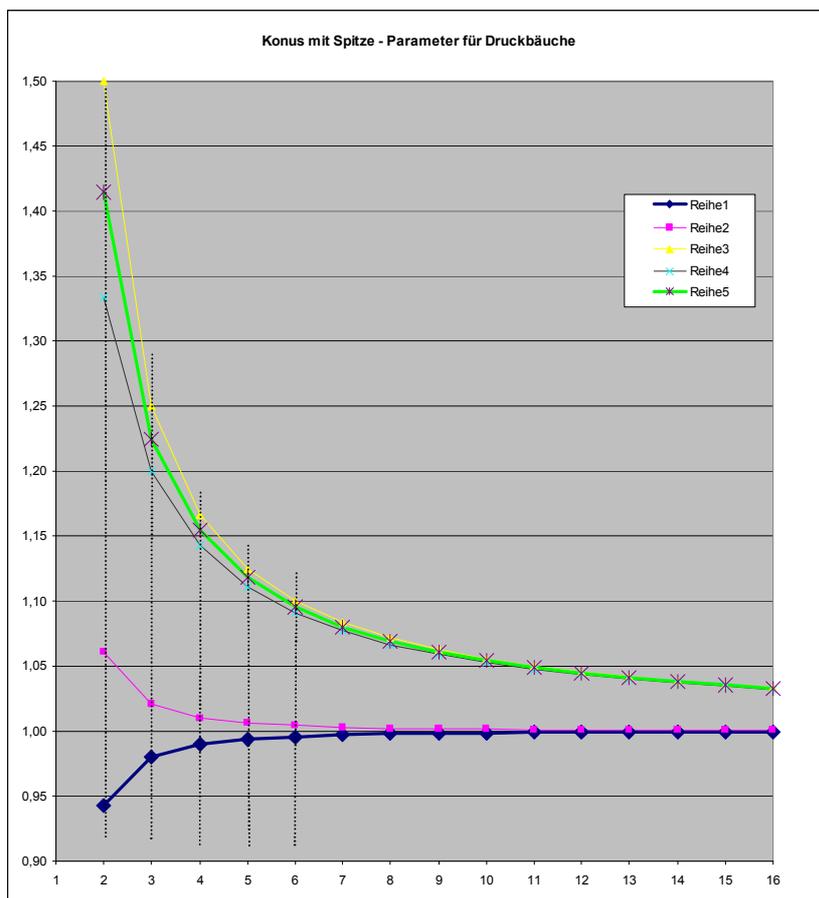
Max. Druck-Schwankung Pot. Mode #3, Blau: beids. offener Zylinder, Rosa: Konus m. Spitze (skaliert auf 1)

**Beachte:** z.B. bei  $0,333 \cdot \text{Rohrlänge}$  beträgt  $1/x = 3,00$  bei  $0,666 \cdot \text{Rohrlänge}$  ist  $1/x = 1,50$   
 bei  $0,5 \cdot \text{Rohrlänge}$   $1/x = \text{harmonisches Mittel aus } 3 \text{ und } 1,5 = 2,00$  bzw. reziprok  $0,5 = \text{arithm. Mittel}$ .  
 Das Druckmaximum liegt hier aber bei Faktor  $0,471$  Rohrlänge = Reziprokwert vom Geomittel  $2,1213$   
 bzw. dem Geomittel von  $0,333$  und  $0,666 = 0,471$ . Das letzte Druckbauchmaximum liegt am  
 Geomittel aus  $0,666$  und  $1,0 = \text{Positionsfaktor } 0,816$  der Rohrlänge.

Der Radius korrespondiert jeweils zu Knotenpositionen. Alle Druckbäuche liegen beim Konus mit Spitze jeweils an der **Position des geometrischen Mittels** aus den Druckknotenpositionen zuvor und danach!

$1/x$  beginnt hier mit  $0,0001/100$ ; dh. am Eingang 100% Druck Potential-Änderung. **Druckknoten Positionen -> und daraus schließend Abstände zueinander = Anteil der Wellenlänge werden gegenüber dem offenen Zylinder nicht geändert.** Diese bestimmen die Resonanz-Frequenzen, diese sind daher **zueinander** auch nicht verändert!  $1/2$  Wellenlänge und exakt Vielfache passen auch in einen Konus mit geschlossener Spitze.

Druckverteilung im Konus mit Spitze:

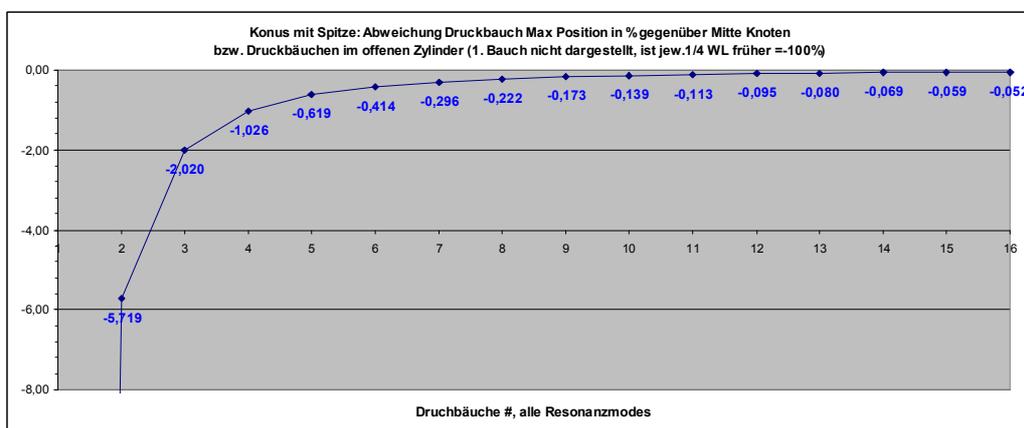


#1-16 = Druckbauch #, (Bauch #1 an der Spitze nicht dargestellt), Faktoren gelten für alle Resonanzmodes!

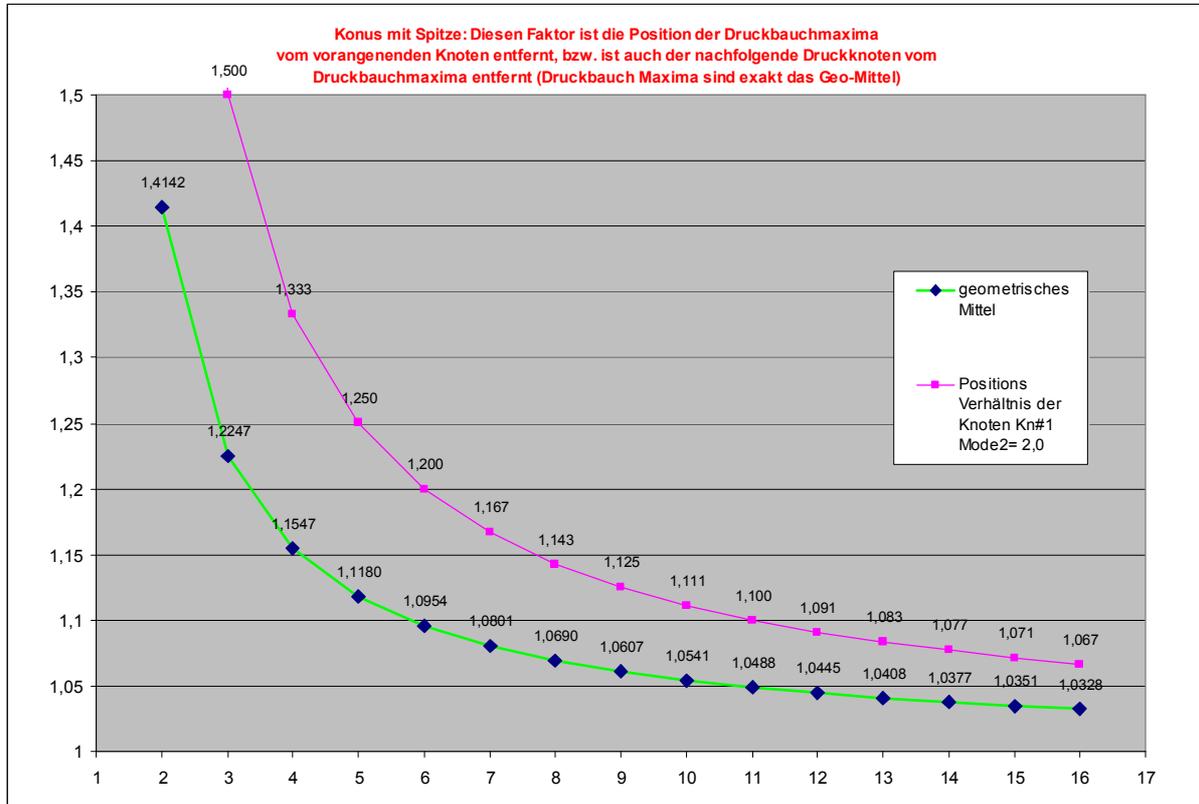
Reihe 1 blau: Druckbäuche als Positionsfaktor zur arithm. Mitte zwischen Druckknoten  
 Reihe 2 rosa: reziprok; arithm. Mitte weicht vom Druckbauch um diesen Positionsfaktor ab

Reihe 3 gelb: 1\* Faktor arithm. Mitte vom vorhergehenden Druckknoten zum Druckbauch (-1/4 WL)  
 Reihe 4 blau: 1/ Faktor arithm. Mitte vom nachfolgenden Druckknoten zum Druckbauch (+1/4 WL)

Reihe 5 grün: Geo-Mitte, diesen Faktor sind Druckbauchmaxima vom vorangehenden Druckknoten entfernt (reziprok), als auch nachfolgende Druckknoten von den Druckbauchmaximas.



Abweichung Druckbauch Maximum Positionen in % zur arithm. Mitte zwischen Druckknotenpositionen (= Druckknotenposition +/- 1/4 WL), gültig für alle Resonanzmodes!



Geo-Mitte, diesen **Längen-Faktor** sind Druckbäuche von der vorangehenden Druckknotenposition entfernt, als auch nachfolgende Druckknotenpositionen von den Druckbäuchen entfernt (alle Resonanzmoden).

Alle Knoten haben immer 1/2 WL Abstand zueinander. Dazwischen in der arithmetischen Mitte liegen beim beids. offenen Zylinder die Druckbäuche. Am geom. Mittel liegen die Druckbäuche beim Konus mit Spitze.

### Konus mit Spitze – Positionsverhältnisse der Druck-Knoten zueinander:

**Die Werte kommen folgendermaßen zustande (gilt auch für Frustum open-open):**

Das Positionsverhältnis der Knoten zueinander ist der Reziprokwert von Pos Rohrlänge, d.h.

Mode2 = 2/1 der letzte **Knoten 2** wird bei  $2 * 0,5 (=1/2)$  sein, Knoten 2 hat selbes Verhältnis zu Knoten 1!

$$\begin{aligned} \text{Knoten 2} &= 2/1 * \frac{1}{2} = 1,0 \\ \text{Knoten 1} &= 1/1 * \frac{1}{2} = 0,5 \text{ von Knoten 2} = 0,5 \end{aligned}$$

Mode3 = 3/2 der letzte **Knoten 3** wird bei  $1,5 * 0,66 (=2/3)$  sein, Knoten 3 hat selbes Verhältnis zu Knoten 2!

$$\begin{aligned} \text{Knoten 3} &= 3/2 * \frac{2}{3} = 1,0 \\ \text{Knoten 2} &= 2/2 * \frac{2}{3} = 0,666 \text{ von Knoten 3} = 0,666 \\ \text{Knoten 1} &= 1/2 * \frac{2}{3} = 0,5 \text{ von Knoten 2} = 0,333 \end{aligned}$$

Mode4 = 4/3 der letzte **Knoten 4** wird bei  $1,33 * 0,75 (=3/4)$  sein, Knoten 4 hat selbes Verhältnis zu Knoten 3!

$$\begin{aligned} \text{Knoten 4} &= 4/3 * \frac{3}{4} = 1,0 \\ \text{Knoten 3} &= 3/3 * \frac{3}{4} = 0,75 \text{ von Knoten 4} = 0,75 \\ \text{Knoten 2} &= 2/3 * \frac{3}{4} = 0,666 \text{ von Knoten 3} = 0,5 \\ \text{Knoten 1} &= 1/3 * \frac{3}{4} = 0,5 \text{ von Knoten 2} = 0,25 \end{aligned}$$

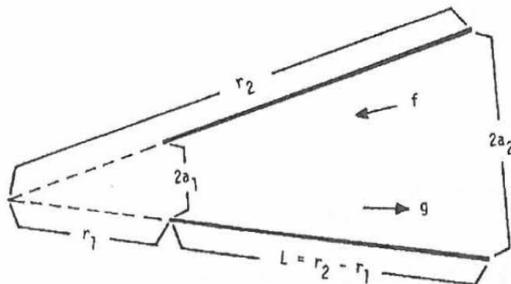
2/1	3/2	4/3	5/4	6/5	7/6	8/7	9/8	10/9	11/10	12/11	13/12	14/13	15/14	16/15
2	1,5	1,33333333	1,25	1,2	1,16666667	1,14285714	1,125	1,11111111	1,1	1,09090909	1,08333333	1,07692308	1,07142857	1,06666667
1,41421356	1,22474487	1,15470054	1,11803399	1,09544512	1,08012345	1,06904497	1,06066017	1,05409255	1,04880885	1,04446594	1,040833	1,03774904	1,03509834	1,03279556
0,5	0,66666667	0,75	0,8	0,83333333	0,85714286	0,875	0,88888889	0,9	0,90909091	0,91666667	0,92307692	0,92857143	0,93333333	0,9375

1. Zeile: Verhältnis der Knotenabstände Knoten 2-10 zueinander
2. Zeile: Quadratwurzel daraus (=Geomittel) = Position Druckbauchmaxima bei Konus mit Spitze, B=0
3. Zeile: Reziprokwert

**Berechnung Druckverlauf Frustum open-open (offener Konus mit fehlender Spitze):**

Resonanzfreq. (n) =  $nc/2L = nc / ( 2 * (r_2-r_1) ) = kn * c/2 * \pi$  wobei L 1,0 = Seitenlänge Frustum =  $r_2-r_1$   
 Druck  $p(r) = \text{abs} ( \{ \sin [ kn (r-r_1) ] \} / r)$  Werte sind in Radiant (Bogenmaß).

wobei r = Faktor Entfernung von der fehlenden Spitze auf x-Achse, (nicht der Radius)  
 Flankenwinkel verändern die Druckverhältnisse, Resonanzfrequenzen + Druckknoten sind nicht geändert.



r1 = Seitenlänge fehlende Spitze, r2 = Länge inklusive fehlender Spitze, L 1,0 = Seitenlänge Frustum  
 2a1 = 2x Radius kleines offenes Ende, 2a2 = 2 x Radius großes offenes Ende, f & g = laufende Wellen

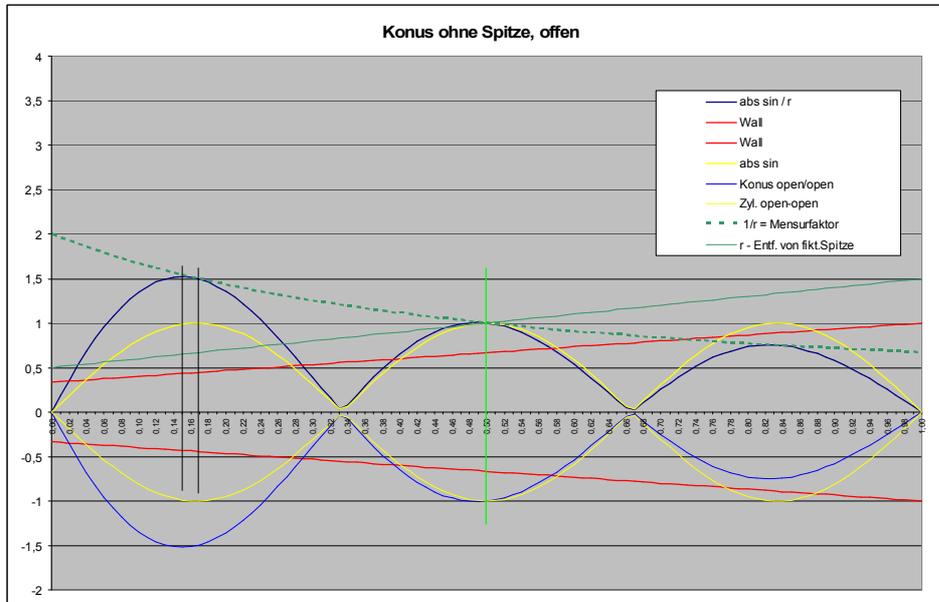
- Position at x r = Abstand zur fehlenden Spitze (pos. Wert)
- Frequenz f n =  $n * \text{Speed} / 2 * \text{Länge Frustum}$
- Periode in Sek. T =  $1 / \text{Frequenz}$
- Winkel Frequenz w =  $2 * \pi * \text{Frequenz}$  oder  $2 * \pi / \text{Periode}$
- Kreiswellenzahl K =  $w / \text{Speed}$
- Verhältnissfaktor B =  $r_1/r_2$
- B 0,0 = Konus mit vorhandener, geschlossener Spitze
- B 1,0 = vollständig geweiteter Konus = beidseitig offener Zylinder (kein Konus)
- Faktor 1/B =  $r_2$  ist diesen Faktor größer als r1
- ebenefalls: = Dia oder Radius bei r2 (großes Ende) ist diesen Faktor größer als kleines Ende.
- r1: =  $1 / ( (1/B) - 1)$  = Seitenlänge der fehlende Spitze
- r2: =  $(1/B) * r_1$  = Seitenlänge inkl. fehlender Spitze
- Konus Länge L 1,0 =  $r_2-r_1$  = Seitenlänge ohne fehlender Spitze = 1,0
- ebenefalls: = Geom. Mittel von B und (1/B)
- Position ohne Shift\*: =  $L - r_1$  = einziger einzelner Punkt ohne Versatz
- 1/r: = Hüllkurve Druckverlauf Amplituden für alle Modes

Da für w bzw. K die Frequenz berechnet werden muß, kann eine fiktive Schallgeschwindigkeit z.B. 343m/sek verwendet werden, diese spielt keine Rolle, da hier L immer Längenfaktor 1,0 ist.

Einige Beispiele, die die hohe Dynamik veranschaulichen:

1/B	B:	r1 =Länge fehl.Spitze =r bei L0,0 – L1,0:	1/r bei L0-L1	r2 = L+ Spitze	L-r1=r=1,0* =1/r=1,0 bei Pos.RL:	
offener Zyl.	1,0 (0,9999)	unendlich	0-0	-	-	
1,1111	0,9	9,0 - 10,0	0,111- 0,1	10,0	-8,0	eff.
1,25	0,8	4,0 - 5,0	0,25 - 0,2	5,0	-3,0	Länge L
1,5	0,666	2,0 - 3,0	0,5 - 0,333	3,0	-1,0	Frustum
<b>2,0</b>	<b>0,5</b>	<b>1,0 - 2,0</b>	<b>1 - 0,5</b>	<b>2,0</b>	<b>0,0</b>	hier immer
<b>3,0</b>	<b>0,333</b>	<b>0,5 - 1,5</b>	<b>2 - 0,666</b>	<b>1,5</b>	<b>0,5</b>	<b>Faktor 1,0</b>
4,0	0,25	0,33 - 1,333	3 - 0,75	1,333	0,666	Winkel der
5,0	0,2	0,25 - 1,25	4 - 0,8	1,25	0,75	Spitzen sind
10,0	0,1	0,111 - 1,11	9 - 0,9	1,111	0,889	v. Endradius
1000	0,001	0,001 - 1,0	999 - 0,999	1,001	0,999	abhängig!
mit Spitze	0,0	0 - 1	unendl. - 1	1	1,0	

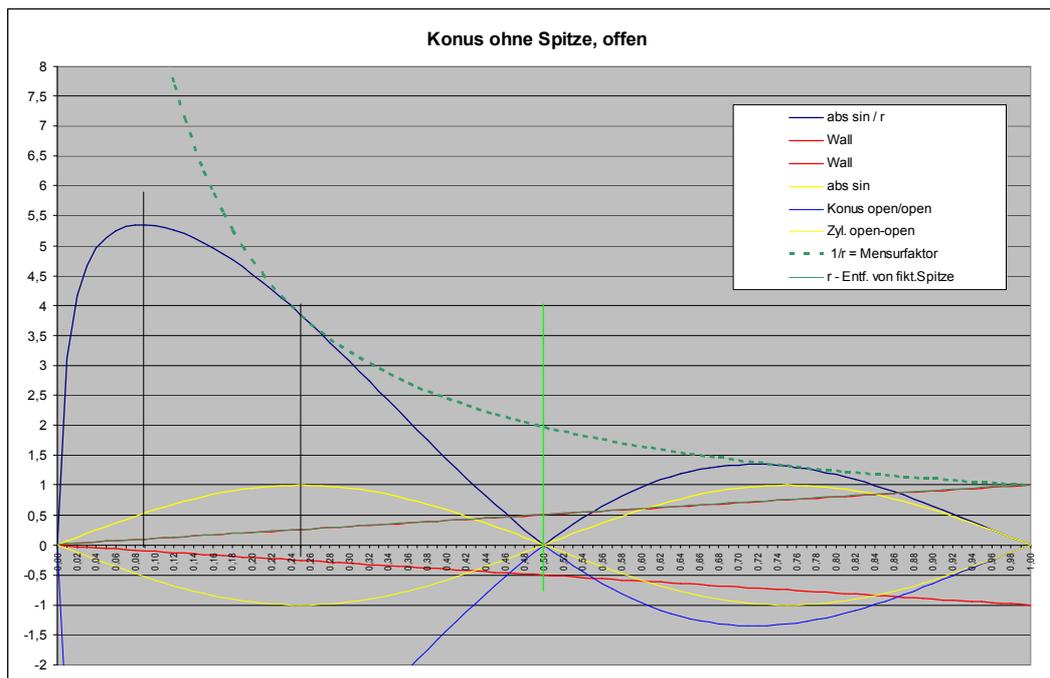
B 0 und 1 = unendlich ... erfordern Division durch 0, welches nicht möglich ist und Fehler liefert, daher wird bei diesen beiden Extremwerten ein minimaler Korrekturwert notwendig.



Druckverteilung Resonanz Mode 3 Blau: mit  $1/B = 3,0$  d.h. Enddurchmesser ist 3 x größer als der kleine offene Durchmesser, fehlende Länge = 0,5 und Länge inkl. fehlender Spitze ist 1,5, Konuslänge = 1,0 Gelb: ein beidseitig offener Zylinder mit undefiniertem Durchmesser; Grün: Druckkurve  $1/r$ . Das Geomittel aus  $r$  und  $1/r$  ergibt immer 1. Bei dem Crossing mit 1,0 ist der einzige Punkt, der nicht verschoben wird.

Die grüne „Druck-Hüllkurve“  $1/r$  ist hier „Flarefaktor“ und bleibt bei allen Resonanzen Moden gleich! Hier bei  $1/B = 3,0$  beginnt diese Kurve bei  $2/3$  von 3,0 ist bei 50% RL Konus bei  $1,0 = 1/3$  von 3 und am Ende bei um  $1/3$  kleiner als  $1,0 = 0,6666$ . Beim Konus mit geschlossener Spitze liegt  $1/r$  am Ende bei 1,0.

Da hier bei Mode 3 bei 50% RL ein Druckbauch liegt, wird auch dieser anhand der Steilheit der höheren Kurve Richtung kleines Ende umgeformt und so verschoben.



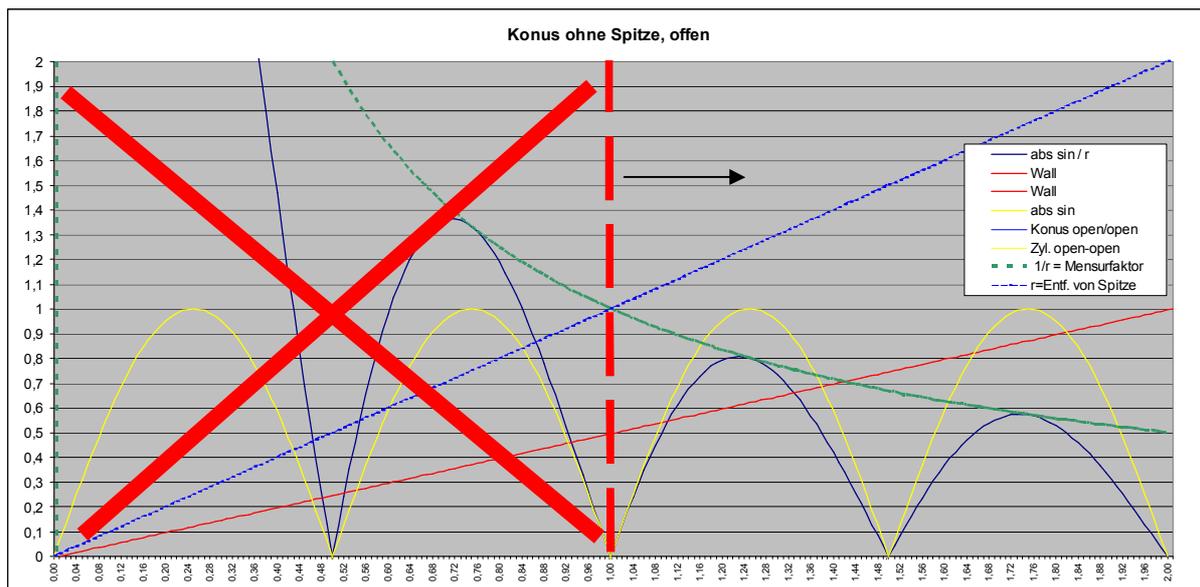
Mode 2 bei  $B = 0,01$ , der Enddurchmesser ist 100 \* größer.  $1/4$  WL ist hier 0,25 RL,  $1/8$  WL 0,125 RL Das 1. Druckbauchmaximum ist von Pos. 0,25 auf 0,09 gewandert, Hüllkurve Wert = 10,0

Beim Konus mit vorhandener Spitze  $=B$  0,0 wandert der 1. Druckbauch um  $1/4$  WL an die Spitze des Konus.

### Die Lage der Druckbauchmaxima beim Frustum open-open:

Beim geschlossenen Konus mit Spitze (B Faktor =0) wurden fixe Werte des Versatzes pro Druckbauch ermittelt. Nimmt man einen geschlossenen Konus mit Länge 2,0 so hat dieser eine doppelt so große Wellenlänge und dadurch haben  $n^2$  die selben Resonanzfrequenzen wie ein halb so langer (wenn auch offener) Konus mit Länge 1,0.

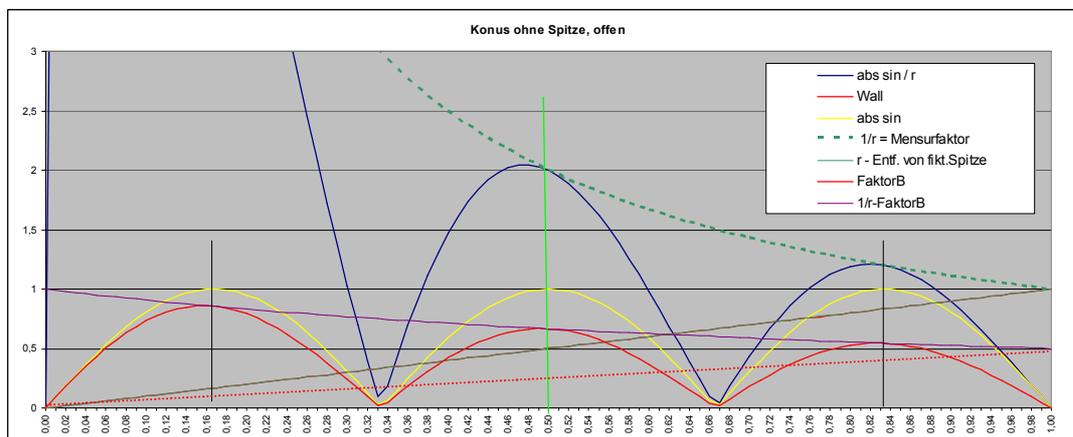
Nimmt man andererseits einen offenen Konus mit B Faktor 0,5 so bedeutet dies, daß die fehlende Spitze exakt die selbe Rohrlänge hat, wie der verbleibende offene Konus mit Gesamtlänge  $r_2=2,0$ .



Resonanz Mode 4 beim geschlossenen Konus mit Spitze mit  $L = 2,0$  und mit B-Faktor  $0,0 =$   
 Resonanz Mode 2 beim offenen Konus mit fehlender Spitze;  $L = 1,0$  und mit B-Faktor  $0,5$

Ein Konus mit Spitze und Länge  $\rightarrow 2,0$  hat bei gleicher Wellenlänge hier Mode 4, dh. 4 Druckbäuche. Der offene Konus mit fehlender Spitze hat nur die letzten beiden Druckbäuche und somit auch den selben Versatz wie Druckmaxima #3 mit Geometrie  $1,2247$  zu  $1,25$  arithm. Mitte =  $2\%$  und #4 mit Geometrie  $1,1547$  zu  $1,1666$  arithm. Mitte =  $1\%$  zwischen Druckknoten vom geschlossenen Konus mit Spitze!

Ich habe also die Mode Nummern /Druckbauch # mit 2 multipliziert. Die Positionsverhältnisse der Knoten beziehen sich auf die nicht vorhandene Spitze, es hat sich die Längenskala verdoppelt. Der nicht benötigte linke Teil beginnt mit Entfernung  $r = 0,0$  und endet mit  $r = 1,0$ . Eine weitere Möglichkeit ist es daher einen weiteren „R-Faktor“ zu definieren, in diesem Fall wäre am Beginn bei  $0 = r_0$ ,  $+1,0$  für B  $0,5$  und daraus einen  $2. 1/R\text{faktor}B$  zu berechnen, das ist dann die Verlängerung von  $r$  und somit der Druckmaxima Kurve:



blau: closed cone  $B=0$ , rot:  $B=0,5$  mit  $r\text{-Faktor}B +1,0$  Bauch 4-6 von  $B_0 \rightarrow$  Bauch 1-3 v.  $B_{0,5}$   
 4: MW  $1,1666$  Geo  $1,1547 -1,1\%$  5: MW  $1,125$  Geo  $1,118 -1,06\%$  6:  $1,10$  Geo  $1,0945 -1,01\%$



Je nach Öffnungswinkel und somit dem Verhältnis  $r_1$  zu  $L$  sowie Mode # fehlen aber nur selten ganze Druckbäuche, sondern Bruchteile davon. Bei  $1/B=3$  ist das Längenverhältnis 1,5 mit 0,5 fehlender Spitze. Hier sind also  $1/3$  von Druckbäuchen in der fehlenden Spitze, was wiederum bedeutet, daß bei ungeraden Moden hier Antiresonanzen an der nicht vorhandenen Spitze liegen, diese haben keinen Druckbauch am Beginn. Exakte Werte können anhand der Kurven einzeln ermittelt werden.

### Berechnung Druckverlauf, Flussmaxima & Frequenzen Frustum closed-open:

$1/r$  ist beim Frustum closed-open ident, d.h. es gelten die selben Pressure Hüllkurven, der Versatz der Resonanzfrequenzen variiert allerdings anhand B-Faktor.

**Druck**  $p(r) = \text{abs}(\{\sin[k * (r_2 - r)]\} / r)$  Werte sind in Radiant (Bogenmaß).

$r_2$  = Gesamtlänge inkl. fehlender Spitze,  $r$  = Abstand zur fehlenden Spitze, gibt =0 bei  $L = 1,0$  anstelle  $(r - r_1)$  beim offenen Frustum, wo  $r_1$  = Position bzw. Abstand kleines offenes Ende zur Spitze

Flussmaxima sind dort wo Druckknoten liegen, Flußknoten dort, wo Druckbäuche liegen. Pitch Pot und Magnituden Nodes liegen davon zum kleinen Ende versetzt: Max. Pitch Pot durch lokale Perturbationen liegt an Druckbäuchen (Maxima von  $p(r)$ , sowie an den Maxima Stellen folgender Funktion

**Pitch Pot Max(r)** = Maxima von  $p(r) = \text{abs}(\{\sin[k * (r_2 - r)]\} / r)$   
und = Maxima von  $f(r) = \text{abs}(\{\cos[k * (r_2 - r)]\} / r)$ , dies ist nicht die Flußkurve!  
= an Druckbauchmaxima und jeweils vor Druckknoten (Flußbäuchen).

Zin Magnit. Nodes = detto, nur bei Mode #1-#2

### Resonanzfrequenzen:

für Wellen-> zu Wellen <- =0 bei  $r = r_1$ : (kleines geschlossenes Ende), Resonanzfrequenz, wenn:

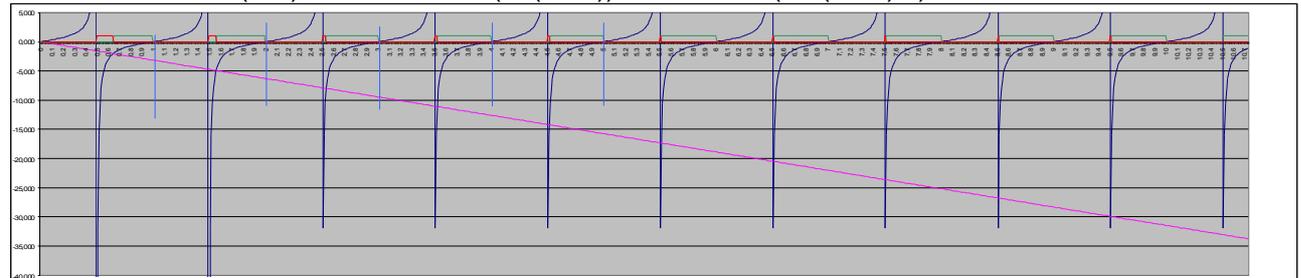
$$\tan(k * L) = -k * r_1 \text{ gibt:}$$

$$\tan(\pi * f / f_0) = - (B / (1 - B)) * (\pi * f / f_0)$$

mit  $f_0 = c / (2 * L) =$  Grundton offener Zylinder (oder Konus mit Spitze) mit selber Länge  $L = r_2 - r_1 = L_1, 0$   
 $w = 2 * \pi * f$  oder  $2 * \pi / \text{Periode}$  und daraus  $k = w / \text{Speed of Sound}$

n th root:

$$f_n \sim n * (1 - B) * f_0 = n * (1 - (r_1 / r_2)) * c / (2 * (r_2 - r_1)) = n c / 2 * r_2$$



$x =$  Verhältnis Freq./Freq. 0 = Grundton offener Zylinder bzw. geschlossener Konus, hier mit  $B=0,333$

Blau: Tangens ( $\pi * \text{Freq}/\text{Freq.0}$ ), d.h. Tangens aus  $\pi$  mal Frequenzverhältnis

$$\text{Rosa Linie} = 0 - (B / (1 - B)) * (\pi * f / f_0)$$

Die Lösung ist eine sogenannte transzendente Gleichung, deren Herleitung durchaus komplex ist.

Die **Schnittpunkte** zur aufsteigenden Tangenskurve ergeben die resultierenden Resonanzfrequenzen!

### Konus mit Spitze $B=0$ (Limit):

Nulldurchgänge bei  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , usw sind die Resonanzfrequenzen (hellblaue Striche)

wobei  $n = 1, 2, 3, 4$  ist immer ein exakt harmonisch Vielfaches von  $\pi$ ;  $1 * \pi$ ,  $2 * \pi$ ,  $3 * \pi$ , usw.

### Einseitig geschlossener Zylinder $B=1,0$ (Limit):

Minuspole bei  $N = 0,5, 1,5, 2,5$  usw. sind die Resonanzfrequenzen, wobei  $n = 1 * \pi / 2, 3 * \pi / 2, 5 * \pi / 2$  usw. d.h. ungeradzahlige Vielfache

### Dazwischen: Frustum closed-open:

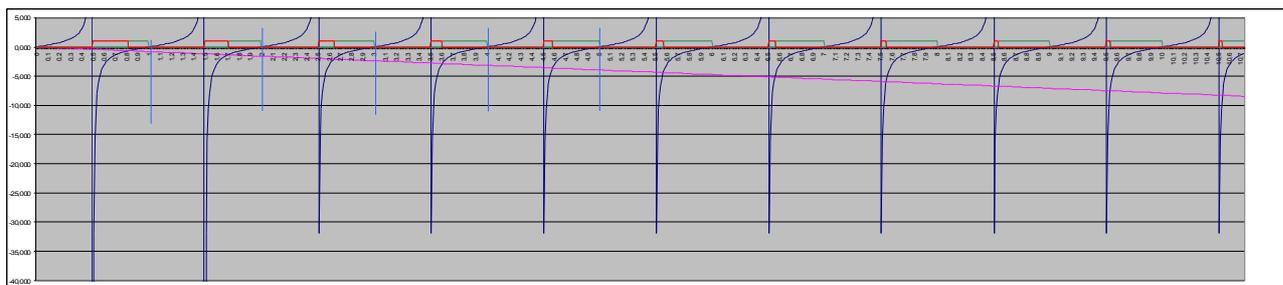
hier als Beispiel B-Faktor 0,333: d.h. die fehlende Spitze  $r_1 = 0,5L$ , resultierende Länge = 1,0 das kleine geschlossene Ende ist  $3 *$  kleiner als das große offene Ende

Da hier eine Auflösung von 1% gewählt wurde, (1/100 Schrittweite für  $n=+1,0$ ) ist der x-Skalawert auch gleichzeitig das passende Frequenzverhältnis als Faktor. Wird mit  $\pi$  bzw. Bogenmaß Rad als Skala gerechnet, so beträgt die resultierende Frequenz:  $x / \pi * f_0$   
 Der 1. Mode liegt hier mit dem Faktor  $B = 0,333$  bei  $0,73 * \text{Frequ. des Konus mit Spitze (tiefer)}$

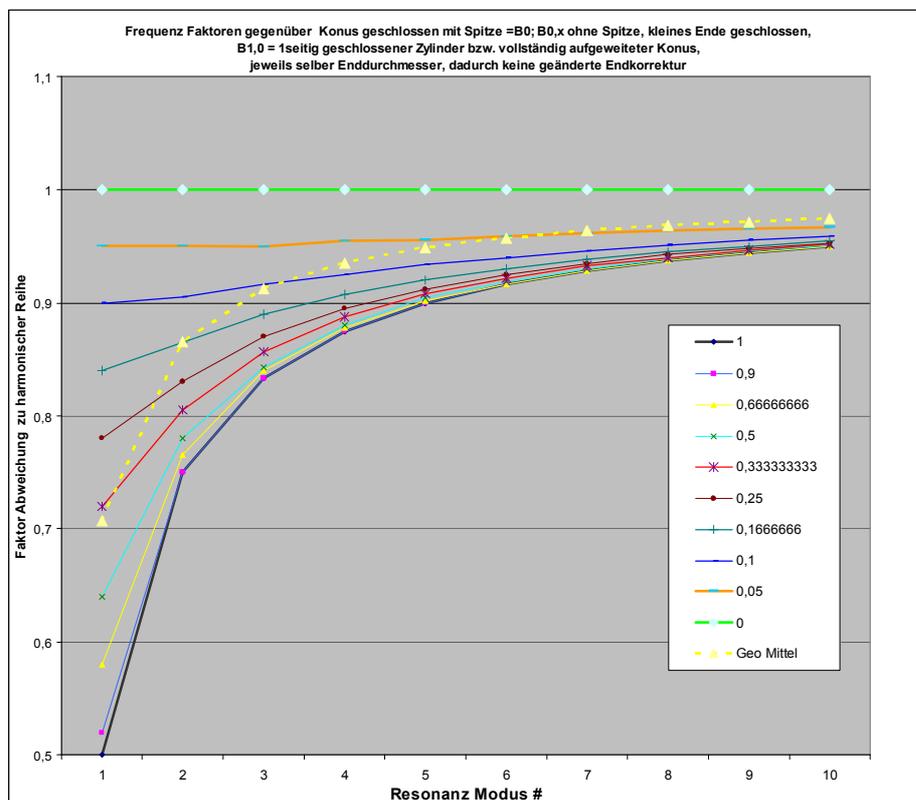
Rot eingezeichnet: Wenn rosa / blau  $> 1,01$ ; dann 1 = anzeigen, ansonsten 0 diesen Betrag sind die Resonanzfrequenzen vom geschl. Zylinder entfernt

Grün —,- Wenn rosa / blau  $< 1,00$ ; dann 0 ansonsten „1 = anzeigen“ diesen Betrag sind die Resonanzfrequenzen vom Konus mit Spitze entfernt.

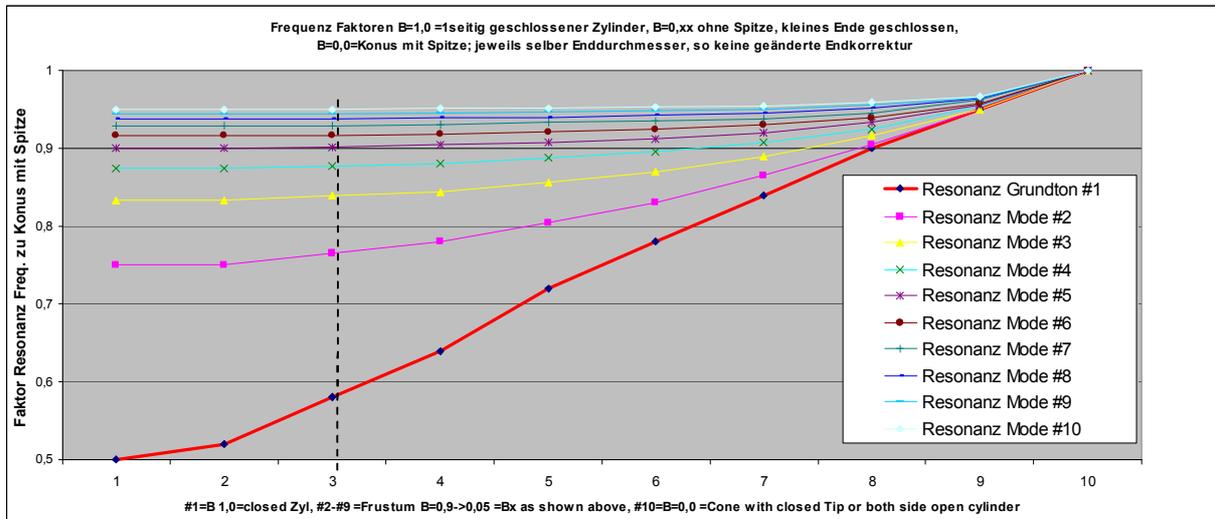
Diese Division hat den Vorteil, daß bei hohen B-Faktoren auch an den Resonanzen wo die Tangenskurve nicht mehr „kreuzt“ ein richtiger Treffer als 1.Wert ausgegeben wird. Siehe Mode 11 im obigen Beispiel. Diese Methode hat einen Restfehler von  $< 1\%$ , ist also für meine Vergleichszwecke ausreichend klein.



Beispiel Faktor  $B = 0,2$  0,25 L der fehlenden Spitze, großer Durchmesser ist 5 mal größer.  
 Der 1. Mode liegt hier bei  $0,81 * \text{Frequ. des Konus mit Spitze (tiefer)}$



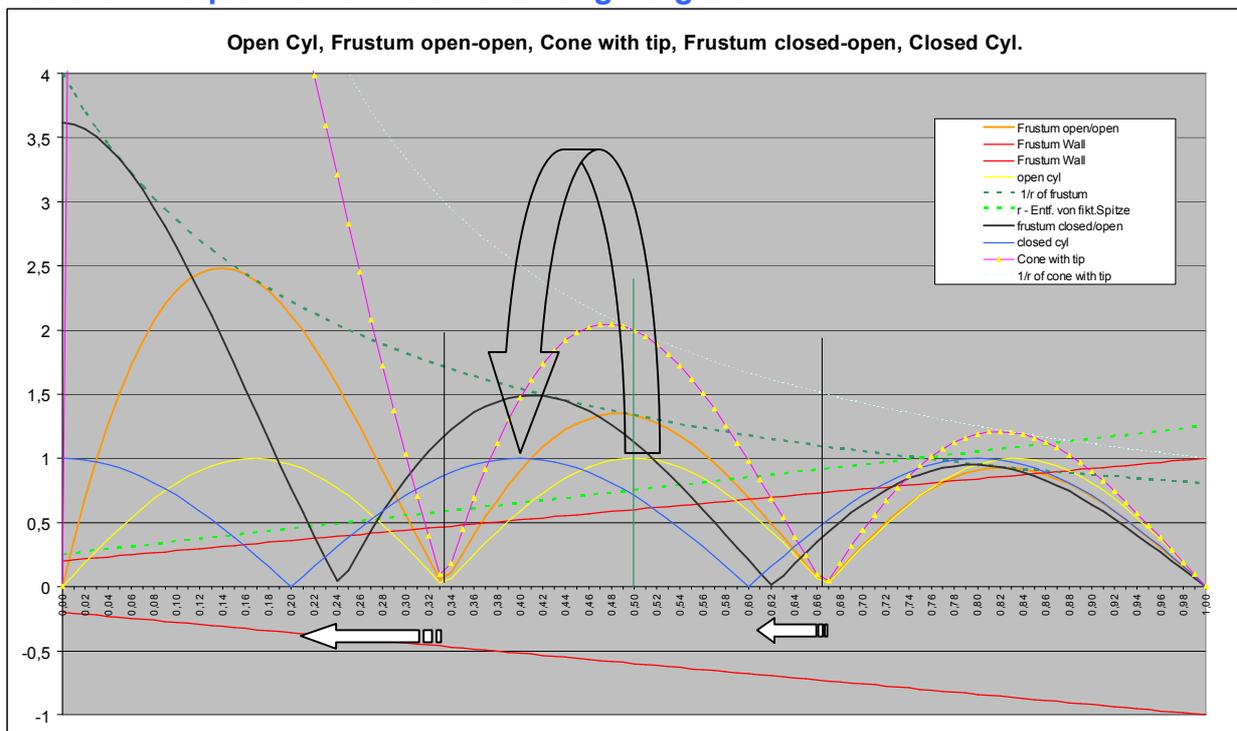
Betrachtet man die vorangegangenen Grafiken, stellt man fest, daß die höheren Moden durch das Aufweiten der Spitze vergleichsweise sehr rasch in der Frequenz auf den Wert des geschlossenen Zylinders fallen, die tiefsten Resonanzmoden jedoch dazu aber relativ noch höher liegen. Gelb strichliert ist die geometrische Mitte der maximal möglichen Frequenzänderungen. Schon bei  $B=0,1$  sind alle Modes  $> \#3$  mehr als diese mögliche Hälfte in der Resonanzfrequenz Änderung gesunken.



Die hier gewählten B-Fakt. sind nicht „uniform“, daher eine wellige Form bei den Kurven.  
 Der generelle Vertiefung - schon bei kleinstem Aufweiten der Spitze beträgt ~ 5% also grob ein Halbton.

Generell werden alle Resonanzfrequenzen des Konus mit Spitze durch das Aufweiten der geschlossenen Spitze rasch tiefer, höhere Modes fallen schon bei kleinster Änderung vergleichsweise stark und sind so bereits rasch an ihrem möglichen Limit - der Frequenz des geschlossenen Zylinders. Andererseits ist mit Ausnahme des Grundtones bereits ab ca.  $B > 0,66$  der max. Frequenz-Shift down beinahe erreicht.  $B=0,66 = 2/3L!$  fehlende Spitze,  $1/3L$  Konuslänge, Radius kleines Ende hat  $2/3$  vom großen offenen Ende.

**Resonanzfrequenzen & Druckverteilung Vergleich:**

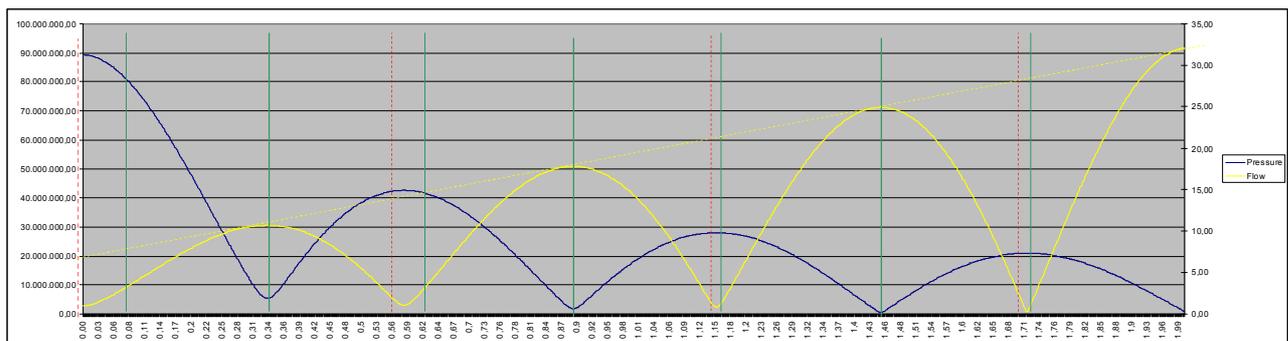


Mode 3 mit  $B = 0,2$  das kleine Ende ist hier bei den Frusta 5x kleiner als das große Ende  
 Die Druckprofil – Hüllkurven sind für die Frusta jeweils gleich, egal ob offen oder geschlossen.

Solange das kleine Ende offen bleibt, sind Druckknotenpositionen, der  $1/2$  WL Abstand und somit Frequenz nicht verändert. Druckbauchmaxima wandern von der arithm. Mitte zwischen Druckknoten bis an das kleine Ende, sobald die nun „Spitze“ geschlossen ist, wird der 1. Druckknoten dabei ausgelöscht. Druckbauchmaxima sind nun an der geometrischen Mitte der Druckknoten. Wir sollten erkennen, daß nur noch Druckknoten Positionen für die Frequenzänderung = Änderung der Wellenlänge aussagekräftig sind, das setzt aber voraus, daß alle Modes exakt am offenen Ende reflektiert werden (nicht bereits früher), daher sind diese Beobachtungen für Schallbecher nur bedingt verwendbar.

Sobald die verschlossene kleine Seite (Spitze) weiter in Richtung closed-open Zylinder aufgeweitet wird, wandern nun die Druckknoten Richtung kleines Ende, d.h. größere, aber gleich lange Abstände, diese sind  $\frac{1}{2}$  WL einer nun tieferen Resonanzfrequenz. Am besten betrachtet man hier die Situation vom offenen Ende.

Der Abstand  $=\frac{1}{2}$  Wellenlänge erhöht sich hier von 0,38 auf 0,4m, und die Position von 0,62 auf 0,6m. Beim vorhergehenden Knoten muß die neue Position daher 2x die Diff. von 0,02m  $\frac{1}{2}$  WL sein: Von 0,24 auf 0,2m. Diese Verschiebung erfolgt anhand der größeren Wellenlänge des closed-open Zylinders. Der Abstand des ersten Druckknoten nach dem closed end entspricht erst jetzt  $\frac{1}{4}$  WL. Beim closed-open Frustum war er 24 cm zu  $38/2 = 19$  cm; also um 5 cm (% Rohrlänge) weiter vom closed end entfernt.



Frustum closed open, Dia 6mm closed auf 30mm open, Länge 2,0m, B=0,2 Resonanz Mode #4; Open Wind Simulation Druck und Fluss; grün =  $\frac{1}{4}$  WL Positionen vom offenen Ende (rechts) rot: das geometrische Mittel zwischen  $\frac{1}{2}$  Wellenlängen (Druckknoten Positionen) wäre der Versatz, wenn das kleine Ende eine Spitze wäre (Konus), d.h. das wäre die maximale Auslenkung der Druckbäuche und Flußknoten mit B=0.

Bei lokalen Perturbationen liegt das max. Pitch Pot an Druckbauch Maxima = Flußknoten, aber nicht an Druckknoten = Flußbauch Maxima, sondern ebenfalls versetzt zum kleinen Ende,

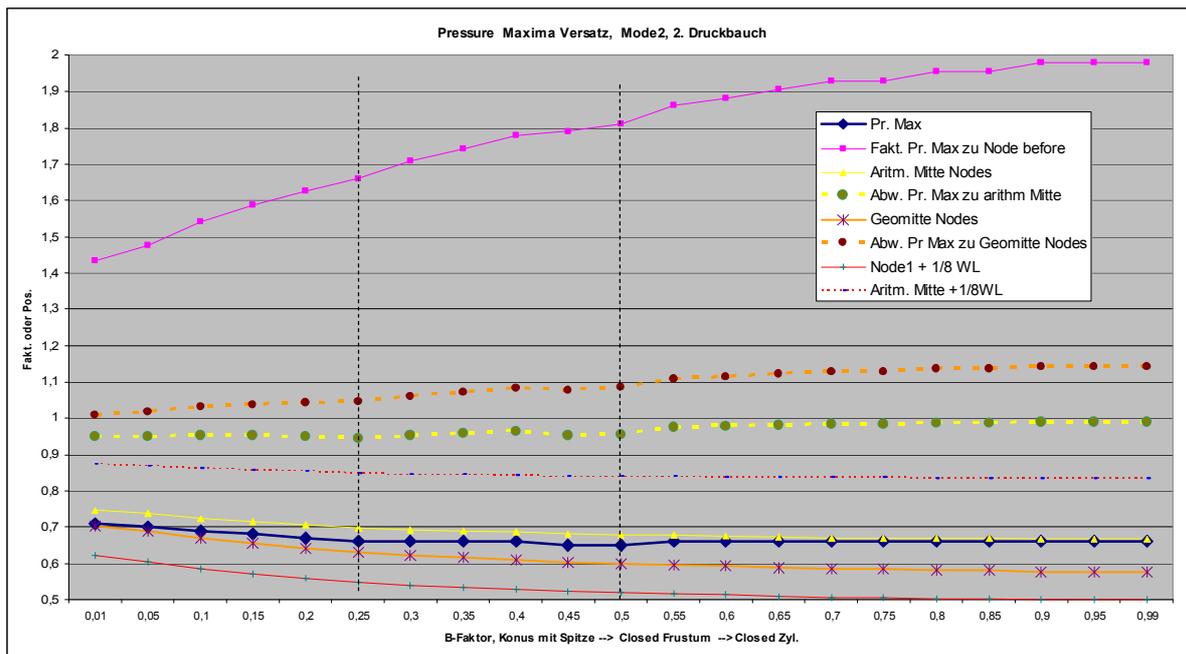
d.h. Pitch Pot Maxima liegen an Maxima von

$$\text{Druck} \quad p(r) = \text{abs} ( \{ \sin [ k * (r2-r) ] \} / r )$$

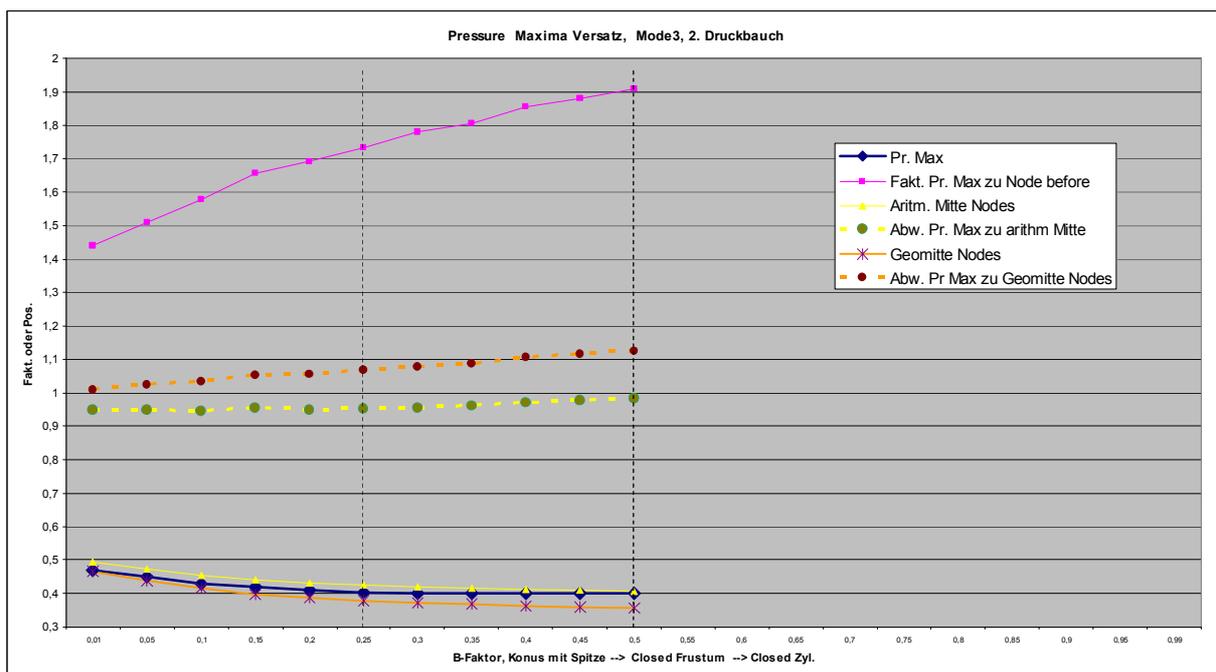
$$\text{sowie an Maxima von} \quad \text{abs} ( \{ \cos [ k * (r2-r) ] \} / r )$$

Bei höheren Modes entspricht das auch annähernd den jeweiligen gefundenen Magnitude Node Positionen.

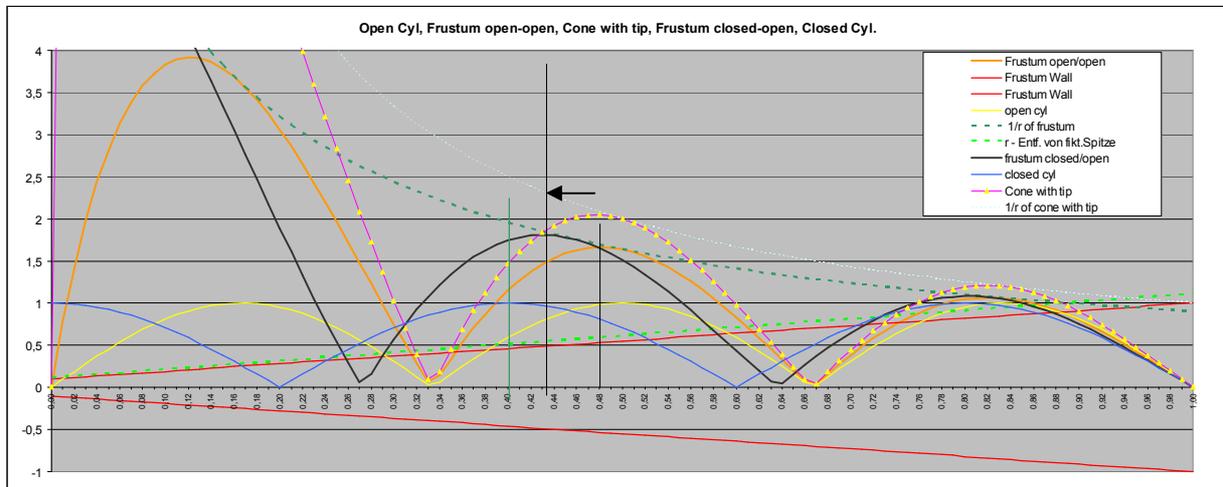
Druckbauchmaxima sind beim Konus mit Spitze schon stark Richtung kleines Ende verschoben. Druckbäuche (mit Ausnahme des 1. am geschlossenen Ende) wandern durch das Aufweiten an die arithmetische Mitte zwischen den Druckknoten, aber schneller, als das Aufweiten einen geschlossenen Zylinder ergibt:



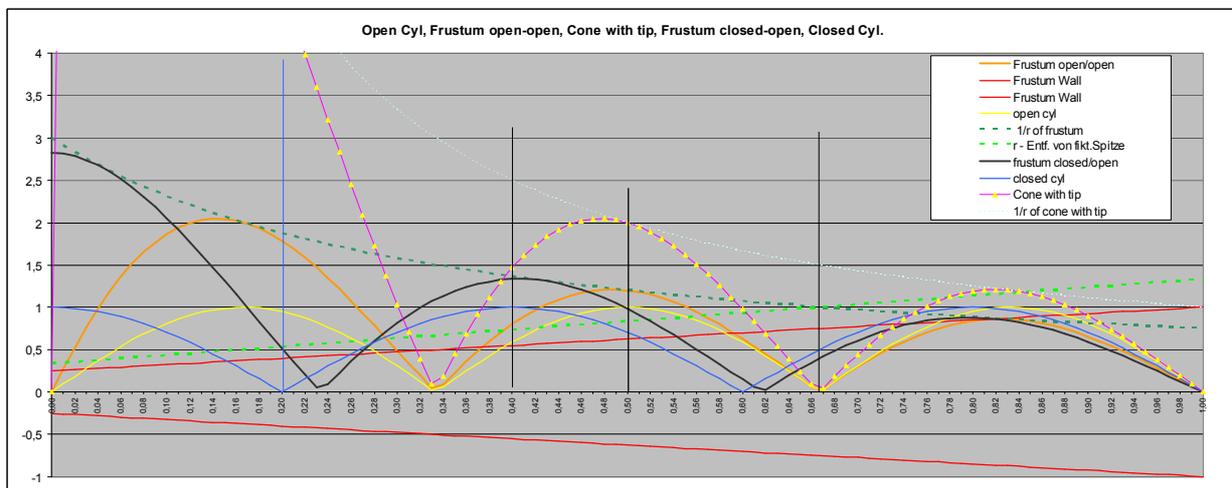
Druckbauch Maxima verschieben sich von der **geometrischen Mitte** der Pressure Nodes **zur arithmetischen Mitte**. Die arithm. Mitte ist jeweils  $\frac{1}{4}$  WL von den Nodes zuvor und danach entfernt, das Geometrie hat beim Konus mit Spitze und Bauch#2 eine **max.** mögliche Positionsabweichung von -5,7% gegenüber der arithm. Mitte. (Betrifft alle Modes, siehe diesbezüglich auch open-open Frustum)



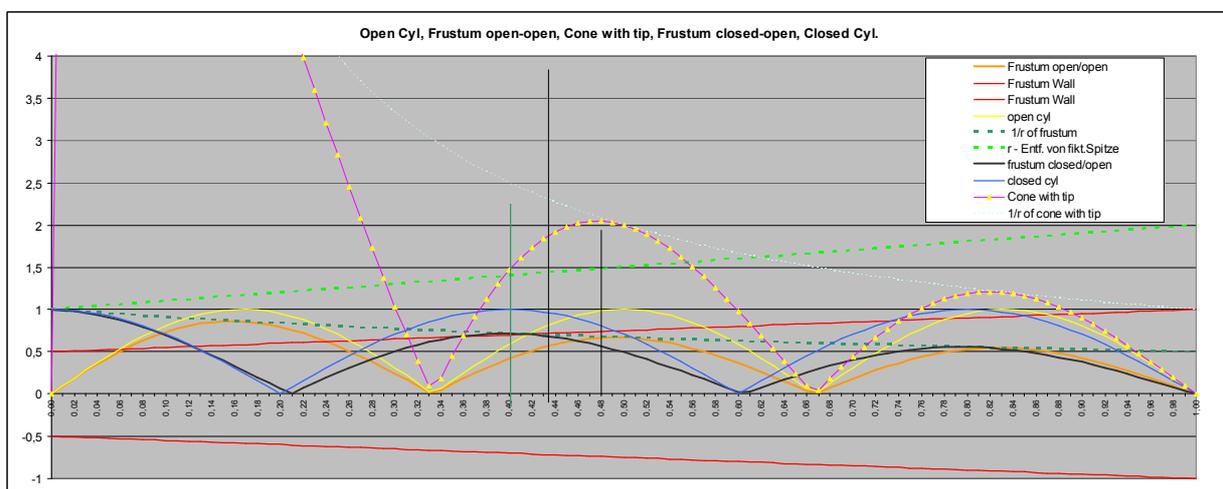
Mode 3, 2. Druckbauch – hier ist das Druckbauchmaxima weiter von den vorangehenden Pressure Nodes entfernt, als bei Mode 2 Bauch #2, (weniger Versatz zu arithm. Mitte) - weil bei Mode 3 die Druckknoten früher = weiter am kleinen Ende liegen (weniger starke Freq. Erhöhung) als bei Mode 2.



Mode 3,  $B = 0,1$  schon durch das geringe Aufweiten sind die Druckknoten beachtlich zu tieferen Frequ. gewandert, bei Mode 3 bereits beinahe 50 % zum Resultat mit völlig aufgeweitetem Frustum ( $B=1$ ) (Mode 2 rund 33%, Mode >3 und aufwärts schreitend noch wesentlich mehr!) Die Druckbauchmaxima = Flußknoten wandern allerdings noch wesentlich schneller...



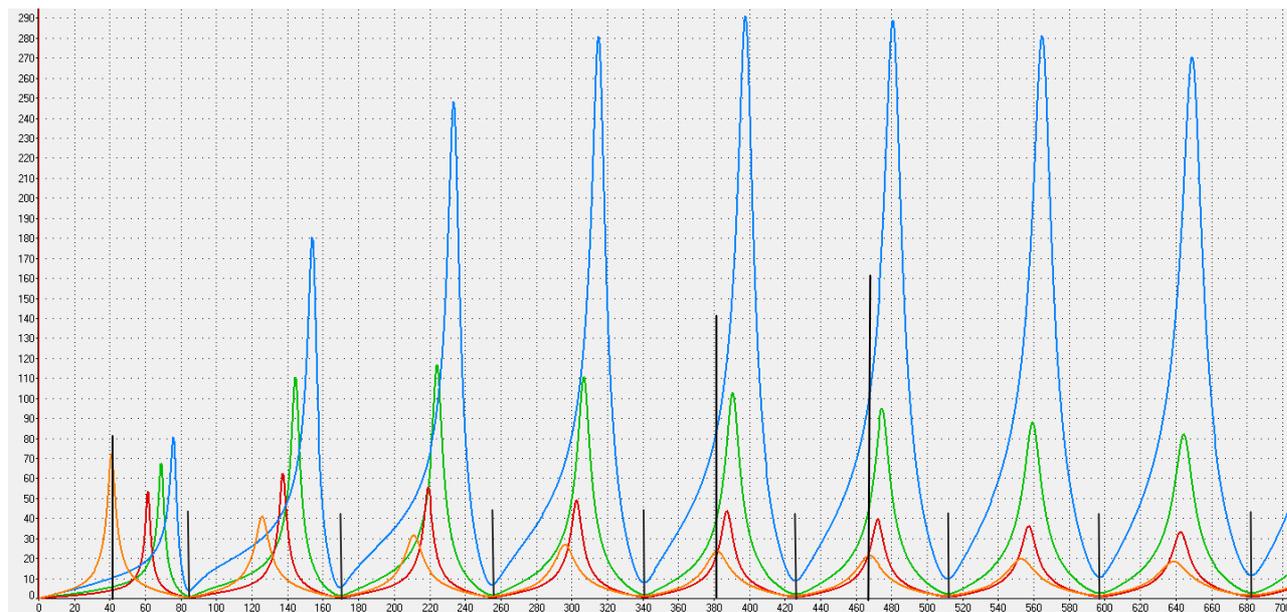
Mode 3,  $B = 0,25$   
 Ab  $B > 0,25$  sind **alle Druckbäuche aller Modes** bereits an Positionen, **wo auch der closed Zyl.** diese hätte und ändern sich fortan nicht mehr. Druckknoten wandern aber weiter Richtung kleines Ende, dies ergibt einen permanenter Versatz der Druckbauchmaxima zu Druckknoten, der vom B-Faktor / Öffnungswinkel des geschlossenen Konus abhängig ist und sich aber bereits bei  $B > 0,5$  beinahe auflöst.



Mode 3,  $B=0,5$ : Das kleine Ende ist nun  $\frac{1}{2}$  so groß wie das große offene Ende, auch Druckknoten und Frequenzen sind beinahe an Werten des völlig aufgeweiteten Frustums =closed-open Zylinder.

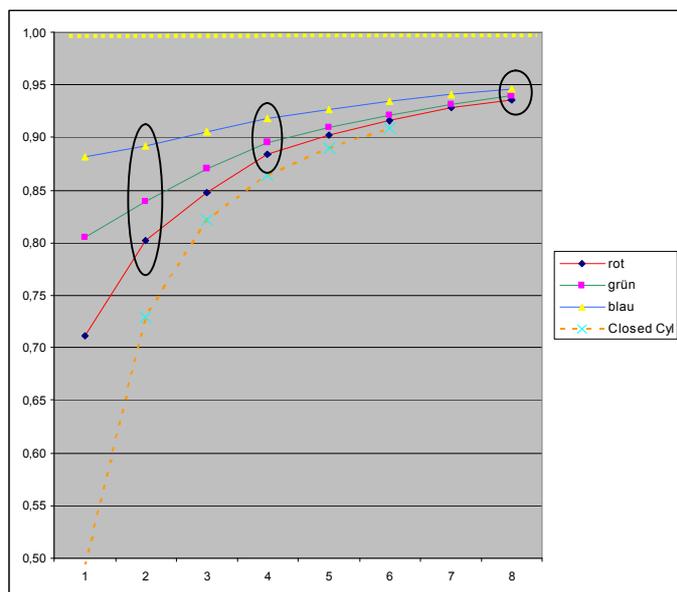
**Bias © b Artim, Simulationen:**

Konus geschlossen am kleinen Ende =( Frustum closed-open), dh. mit fehlender geschlossener Spitze .. gibt unterschiedliche Länge / **Peak Frequ.**; Rot ist näher an einem geschlossenen Rohr als Blau, das nahe am geschlossenen Konus liegt. **Die Minima** bleiben aber dort, wo auch der geschl. Zylinder diese hätte!



**Blau:** Start enger Dia 3mm closed auf 30mm open, Länge 2m **B=0,1** Spitzenwinkel = 0,773 Grad  
**Grün:** Start mittel Dia 6mm closed auf 30mm open, Länge 2m **B=0,2** Spitzenwinkel = 0,688 Grad  
**Rot:** Start weiter Dia 10mm closed auf 30mm open, Länge 2m **B=0,33** Spitzenwinkel = 0,573 Grad  
**Orange:** Start cyl. Dia 10mm closed cyl. Länge 2m = cl. Cyl. bzw. vollständig aufgeweiteter Konus.  
 (Merke: hier sehr unterschiedliche Volumen; XM hat hier unterschiedlichste Durchmesser=Flächen)

Jede **Peak** Maxima Frequenz, hat in nun ihre eigene mensurabhängige WL  
 = bei gleichbleibender Seitenlänge -> dann unterschiedliche Freq., Magnitude und XM Positionen!  
**Allerdings mit dem Unterschied, daß die shared Minima = Antiresonanzen immer an jenen Frequenzen auftreten, die auch ein geschlossener Zylinder selber Länge hätte!**  
 Pressure und Flußzustände bilden dazwischen im 1/8 WL Abstand +/- Versatz Pitch-Nodes.



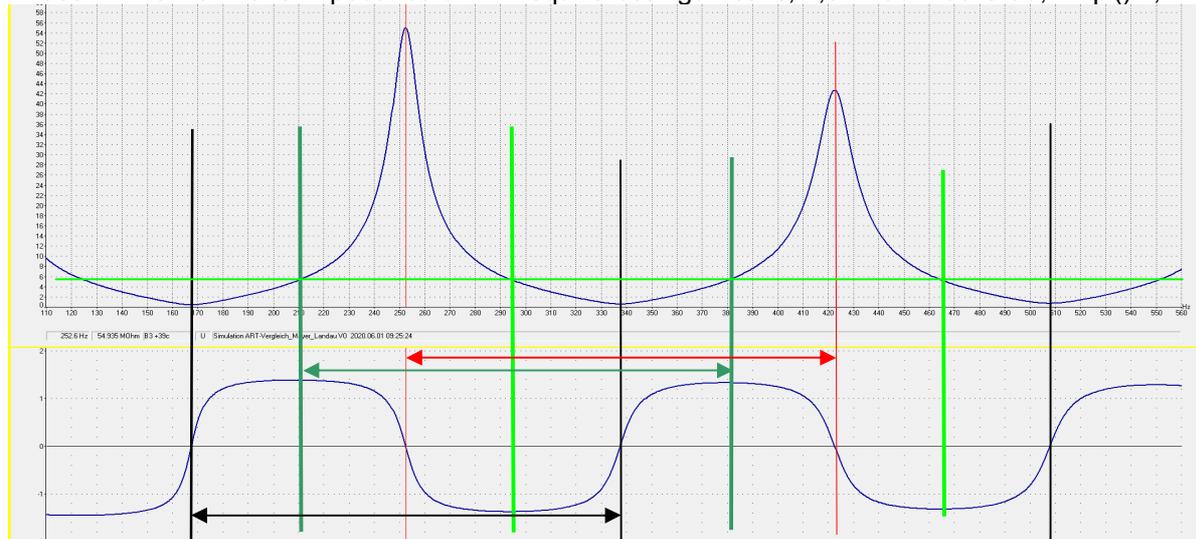
Closed Zyl. als vollständig aufgeweiteter Konus (geschlossen) (gelb = Konus mit Spitze)  
 Kalkulation eines Konus versus Messungen, jeweils fiktiver Grundton der Peaks.  
 gelb B = 0,0      blau B = 0,1      grün = B = 0,2      rot B = 0,33      orange B = 1,0

Die so ermittelten Frequenz Faktoren decken sich sehr gut mit den theoretisch von mir berechneten Werten. Es wird betreffend **Peak Frequenzen** auch die enge Verwandtschaft mit Besselhörnern ersichtlich.

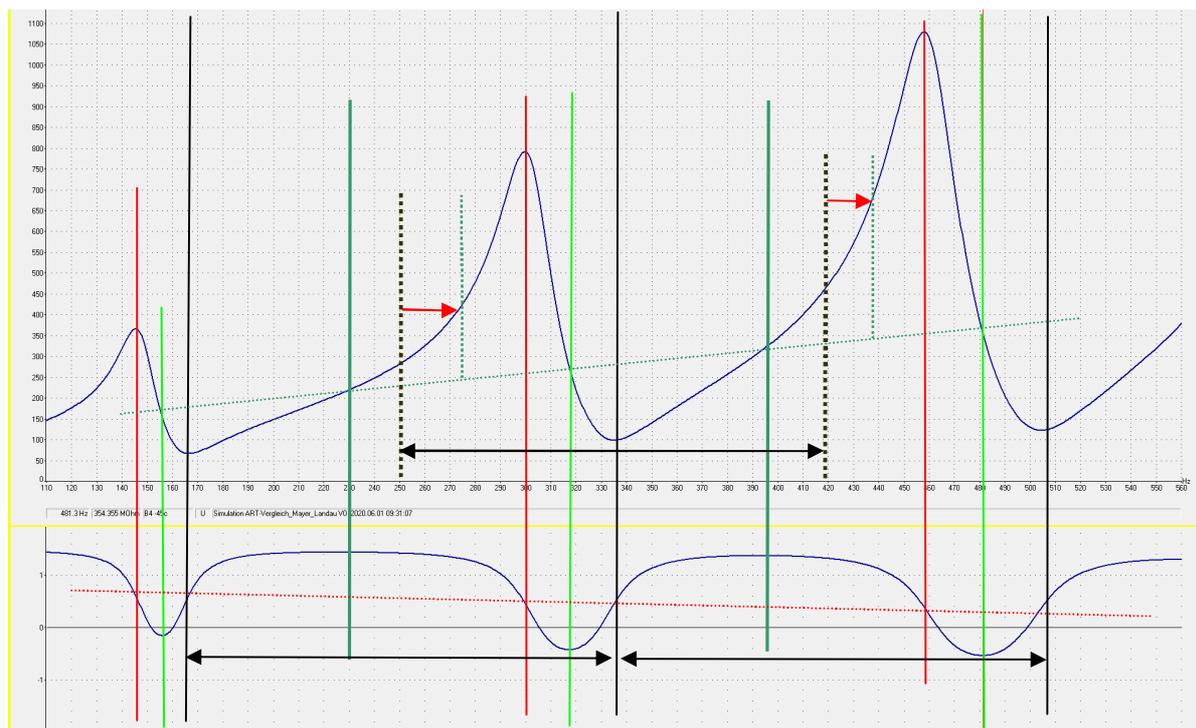
Ersichtlich ist hier eine Größenordnung von bis zu 15 % = entspricht 280 Cent oder ~ 3 Halbtönen innerhalb von ~2 Oktaven, (Peak2-8) um welchen durch „gekürzte“, geschlossene Konusse tiefere Peak Frequenzen (hier~ NT2) die Oktaven spreizen. (theor. wäre keine Spreizung beim Konus mit vorhandener Spitze).

**Bias – Closed Zyl. vs. Frustum closed-open, with mostly closed Apex:**

Phasenwinkel vs. Wave Impedance bzw. Frequ. Crossings Peaks, 1,57 Rad = 90 Grad, =pi()/2;

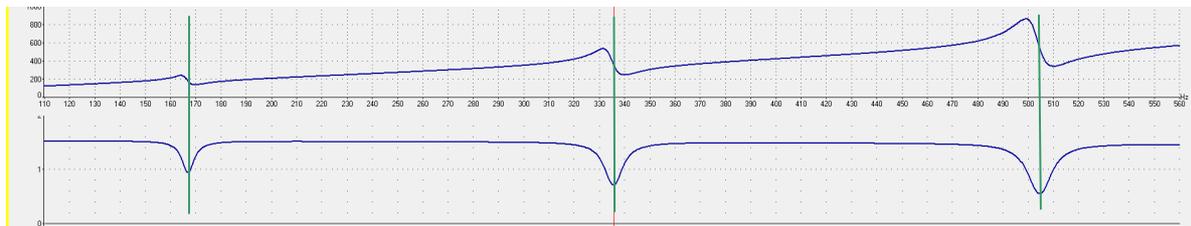


oben: Closed Cyl. L 1000mm, Dia 10mm Abstand Peak/Dip = 1/4WL GT, Frequ. Cross = 1/8WL GT. **B=1,0** Phase 1,57 Rad=90 Grad bei Frequ. Cross.=1/8WL; Pfeile zeigen den gleichen 2/4 WL Abstand (z.B. Minima)



Cone L 1000mm, **Start 1mm, Stop 10mm**; **B=0,1** mit 0,5156 Grad Spitzenwinkel, Minima Positionen = Antiresonanzen „bleiben“, Resonanzen = Peaks stark nach rechts versetzt =höhere Frequ.; Die größten Phasenwinkel bleiben bei Freq. Crossings, allerdings kleinerer Phasenwinkel, umso höher die Mode Nummer, umso geringer wird der Versatz der Peaks als auch Phasenwinkel zum Zylinder.

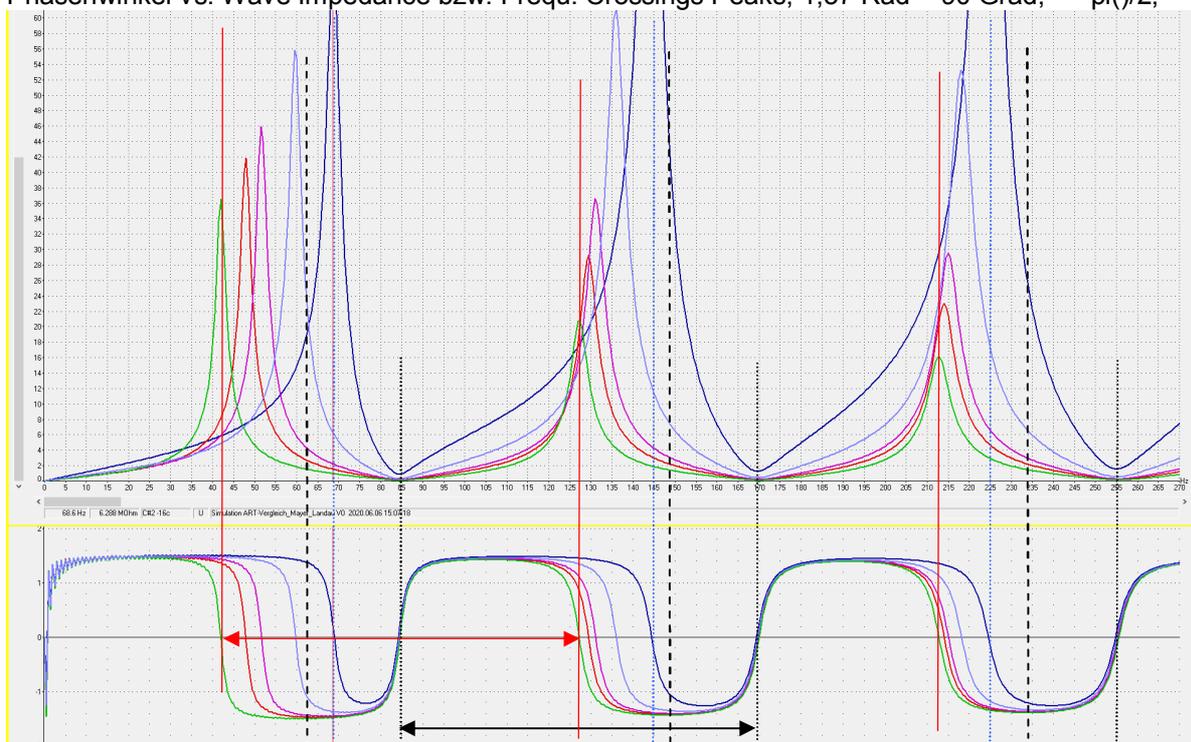
Schwarz: Minima; strichliert: arithm. Frequ. Mitte Minima; Grün: Frequ. Crossings strichliert =arithm. Mitte, Pfeile rot : Frequenzversatz Peaks zu gleich langen einseitig geschlossenen Zylinder. Schwarz: 1/2 WL Minima



Cone L 1m, Start 0,3mm Stop 30mm =1,70 Grad (Spitze beinahe erhalten, **Extrembeispiel Impedanz**) B=0,01  
Hier sind die Frequenz Crossings nach rechts an die Stelle der Minima beim Zyl. gerückt.

### Bias© – Closed Zyl. vs. Frustum closed-open, same Volume vs. Taper

Phasenwinkel vs. Wave Impedance bzw. Frequ. Crossings Peaks, 1,57 Rad = 90 Grad,  $=\pi()/2$ ;



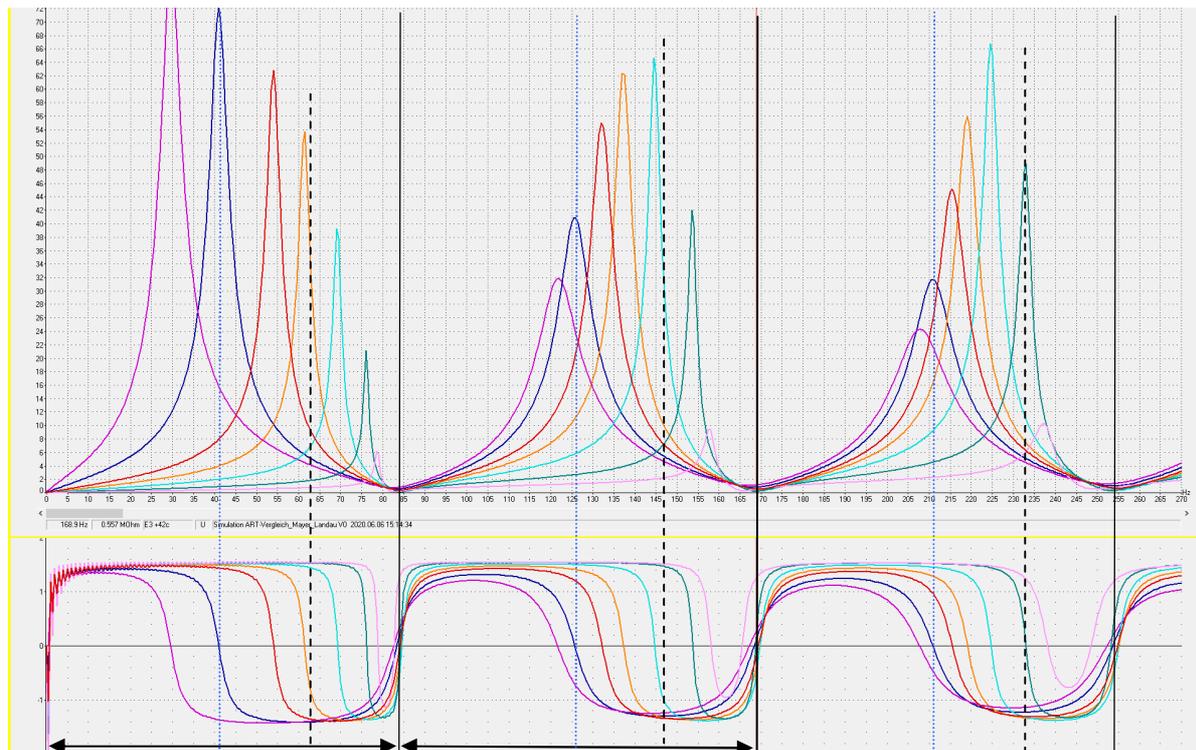
Selbes TL Volumen gibt sehr unterschiedliche Start und Enddurchmesser und auch Winkel  
Pfeile =  $\frac{1}{2}$  WL Minima =  $\frac{1}{2}$  WL Maxima Closed Zyl. schwarz strichliert:  $\frac{1}{8}$ WL Minima des cl. Zyl. Abstand

	Start Dia	Stop Dia	Spitzenwinkel Grad	TL Volume	Länge	B-Faktor
Grün (cl. Cyl):	19,287	19,287	0	584 cm <sup>3</sup>	2000mm	1,0
Rot:	16,4mm	22,4mm	0,172	"	"	0,732
Pink:	14	24,13	0,290	"	"	0,580
Violett:	10mm	27,27mm	0,495	"	"	0,367
Blau:	6mm	30,0mm	0,689	"	"	0,2
Vergleich:	Morsekonus 1:20		2,864	= Steigung 1mm Dia über 20mm Länge		
Sopran Saxophon			~3,5			
Tenor Saxophon			~3,0			
F-Tuba			~2,5			
Oboe			~1,4			
Fagott			~0,8			

Umso größer der Startdurchmesser = umso kleiner der Enddurchmesser  
= kleinerer Öffnungswinkel = größerer B-Faktor = größerer Anteil „fehlende Spitze r1“ des Konus;  
.....= umso tiefer Grundton + Resonanzen, umso kleiner die Impedanz Peak Magnituden,  
.....= umso weniger Versatz Resonanz (Peak) zu Antiresonanzen (Minima davor und danach).

**Bias – Closed Zyl. vs. Frustum closed-open, same Inlet Diam., Diff. Volume**

Phasenwinkel vs. Wave Impedance bzw. Frequ. Crossings Peaks, 1,57 Rad = 90 Grad,  $\pi/2$ ;



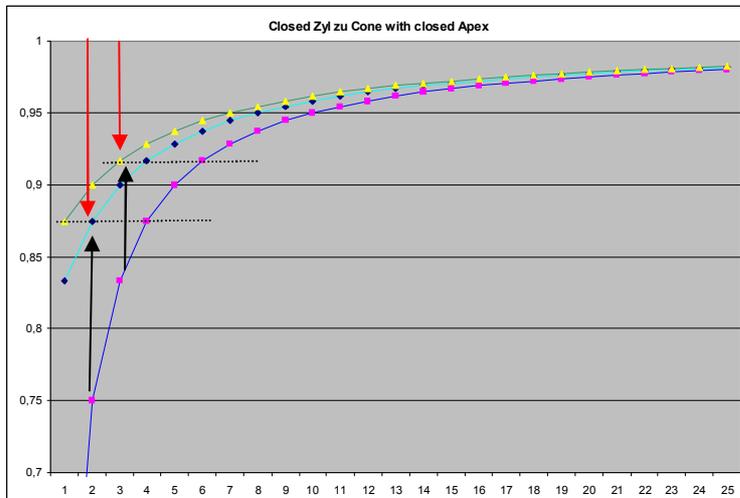
Selber Startdurchmesser gibt mit variablem End-Dia sehr unterschiedliche Gesamtvolumen und Winkel  
Pfeile = 1/2 WL Minima = 1/2 WL Maxima Closed Zyl., schwarz strichliert: 1/8 WL Minima GT closed Zyl.

	Start Dia	Stop Dia	Grad Winkel=	~TL Volume	Länge	B=
Lila (=verjüngend)	10mm	05mm	-0,14	92 cm <sup>3</sup>	2000mm	2,0
Blau: (Cl.Cyl.)	10mm	10mm	0,0	157cm <sup>3</sup>	2000mm	1,0
Rot:	10mm	20mm	0,2864	366cm <sup>3</sup>	2000mm	0,5
Orange:	10mm	30mm	0,5729	681cm <sup>3</sup>	2000mm	0,333
Türkis:	10mm	50mm	1,1459	1.623cm <sup>3</sup>	2000mm	0,2
Dunkelgrün:	10mm	100mm	2,579	5.812cm <sup>3</sup>	2000mm	0,1
Rosa:	10mm	200mm	5,439	22.844cm <sup>3</sup>	2000mm	0,05

Umso kleiner der Enddurchmesser = kleinster Öffnungswinkel = kleinstes Gesamtvolumen  
umso tiefer Grundton + Resonanzen, umso größer die Impedanz Peak Magnitude des Grundtones,  
dafür umso kleiner die Peak Magnituden der höheren Peaks. (-> Schnittpunkt hier ca. B= 0,25)

Erst wenn ein pos. Winkel **sehr** groß wird, verschieben sich **auch** Minima entgegengesetzt den  
Peaks zu tieferen Frequenzen, sie wandern an die Stelle, wo bei völligem Verschluss vorher die  
Maxima Frequenzen waren. (Konus mit kleinem offenen Ende) zu beidseitig offenen Zylinder.  
Ist der Winkel negativ (offenes Ende kleiner), erfolgt der Peakversatz zu tieferen Frequenzen.

Bei einem Winkel von >0,6 Grad wird Peak1 um ~1/8 WL höher versetzt (höhere Peaks weniger)  
Bei einem Winkel von >1,2 Grad wird selbst noch Peak2 ~1/8 WL versetzt --,  
Bei einem Winkel von >2,6 Grad wird selbst noch Peak3 ~1/8 WL versetzt --,



Harmonicity Diagramm der Resonanzfrequenzen #,

Frusta closed-open mit verschiedenen Winkeln/ B-Faktoren

blau: closed Cyl. mit Dia 10mm B=1,0

türkis: Frustum closed-open, Start 10mm mit 1,15 Grad Winkel

B=0,2

grün: 2,6 Grad Winkel mit B=0,1

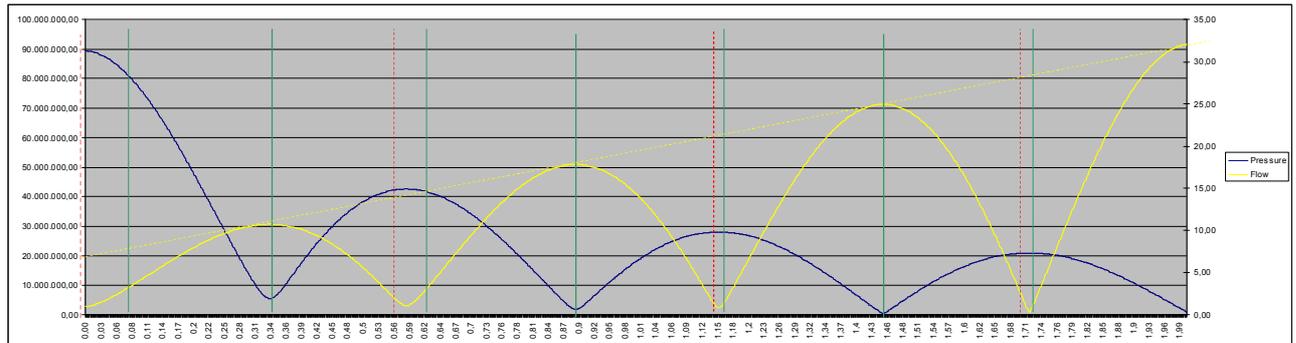
Die fehlende Diff. bei ~ 1,15 Grad beträgt bei Peak 2 anstelle  $\frac{1}{4} WL = \text{Ratio } 0,75$   $\frac{1}{4} WL: 0,33 \rightarrow 0,25 * RL$   
 nur noch  $\frac{1}{8} WL = \text{Mittelwert von } 0,75 \text{ und } 1 \text{ hier nun } 0,875 = \text{new Ratio}$  MW =  $0,29 * RL$   
 d.h. die Abweichung, die beim cl. cyl. der 4. Peak hat.  $\rightarrow 4x$  größerer Enddurchmesser

Die fehlende Diff. bei ~ 2,6 Grad beträgt bei Peak 3 anstelle  $\frac{1}{4} WL = \text{Ratio } 0,833$   $0,2 * RL \rightarrow 0,1666 * RL$   
 nur noch  $\frac{1}{8} WL = \text{Mittelwert von } 0,833 \text{ und } 1 = \text{Ratio hier nun } 0,9167$  MW =  $0,1833 * RL$   
 d.h. die Abweichung, die beim cl. Cyl. der 6. Peak hat.  $\rightarrow 9x$  größerer Enddurchmesser

## Frustum closed-open – Zusammenhänge von Druck, Fluß zu Input-Impedanz:

Bei der Impedanzmessung wird immer der Zustand bei einer bestimmten Frequenz am Input angezeigt: Druck / Fluß, allerdings bezogen zur charakt. Impedanz. Aber es wirken bei diesem Ergebnis starke Kräfte ein, die wir dabei vorderhand nicht sehen.

Situation bei Resonanzfrequenzen:



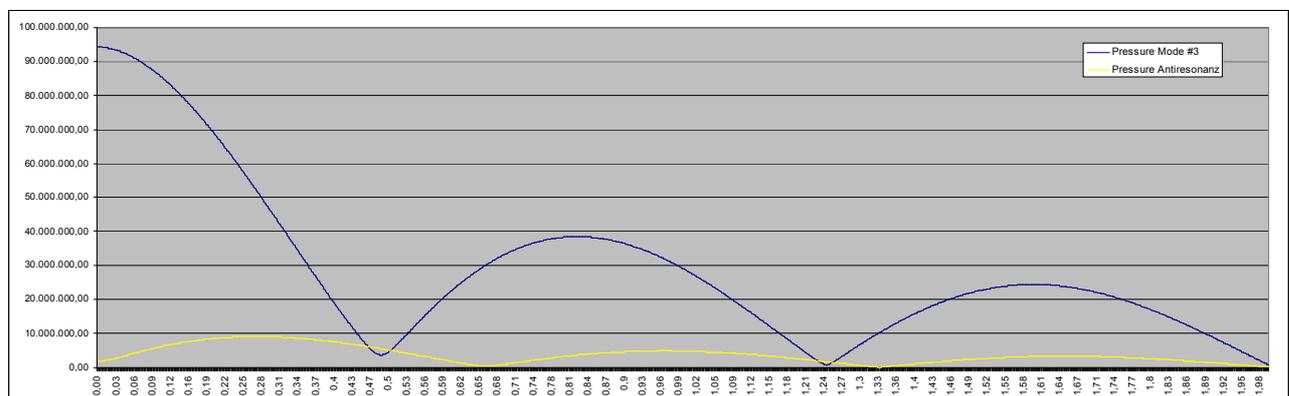
Frustum closed-open,  $L=2,0m$  Diameter closed (left end) 6mm, Diameter open (right end) 30mm,  $B=0,2$  Openwind Simulation,  $y_1$ =Pressure Distribution resonant Mode #3 (blue),  $y_2$ =(right) Flow Distribution (yellow)  $\frac{1}{2}$  Wellenlänge = 0,55 m,  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge = 0,275m als grüne Marker eingetragen (vom open End aus). Flow Antinode maxima envelope raises linear in direction to the open end as a factor of  $r$ , Pressure Antinode Envelope is that of  $1/r$ ,  $r$  being the distance to the begin of the missing cone tip (0,5m)

Die Abstände der Druckknoten definieren die globale Wellenlänge und somit die globale Resonanzfrequenz bei allen Geometrien, sofern sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht ändert. Alle Druckknoten sind exakt in  $\frac{1}{2}$  Wellenlängenabstand vom offenen Ende, ebenso alle auftretenden Flussbauchmaxima.

Die Positionen von Druckbäuchen werden hingegen immer weiter Richtung kleines Ende verschoben, ebenso alle Positionen von Flußknoten. Grüne Marker sind an  $\frac{1}{4}$  WL Positionen, rote Marker an Positionen, die der geometrischen Mitte zwischen Druckknoten entsprechen würde = dies wäre die maximale Verschiebung der Druckbäuche und Flußknoten zum kleinen Ende, wäre es ein Konus mit Spitze, und man stellt fest, diese Verschiebung wird mit zunehmenden Abstand vom offenen Ende immer stärker.

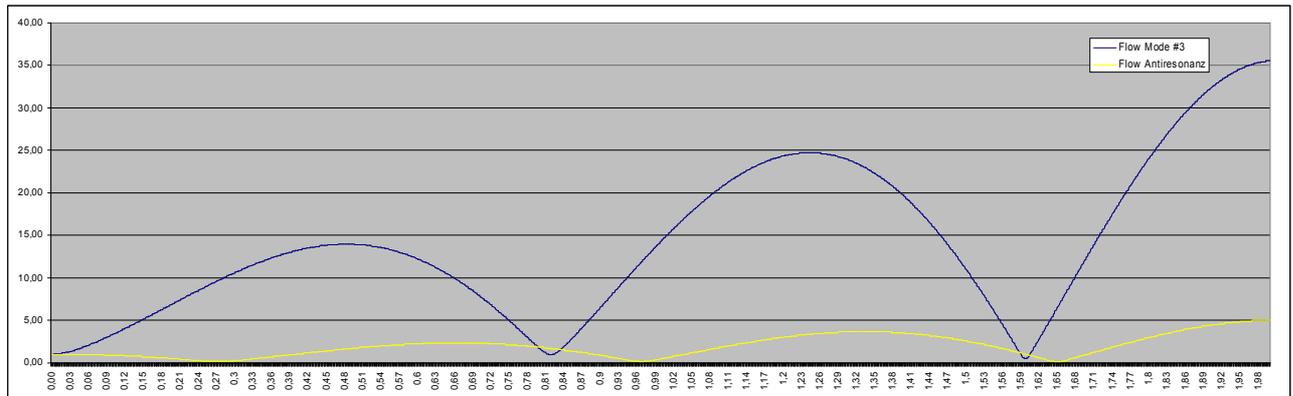
Situation bei Antiresonanzen:

Nimmt man den Input- Impedanz - **Punkt eines Modes** mit der größten Magnitude, und vergleicht diesen mit der Druckkurve **nur dieser Resonanz-Frequenz**, so muß dieser dem aktuell höchst möglichen Druckpotential entsprechen, sofern davon ausgegangen wird, daß der Volumenfluss in diesem Moment wegen Phasenumkehr nahe Null ist. Entgegengesetzt entspricht der **Punkt** mit der geringsten Impedanz Magnitude jener Frequenz, wo die Druckkurve **jener** Frequenz am Eingang einen absoluten „Druckbauch-Minimum“ Status nahe 0 erreicht.



Frustum closed-open,  $L=2,0m$  Diameter closed (left end) 6mm, Diameter open (right end) 30mm,  $B=0,2$  Openwind Simulation, Pressure Distribution resonant Mode 3 (blue) and Antiresonant Frequ. abobe (yellow) global  $\frac{1}{4}$  Wavelength Mode #3 = 0,375m, global  $\frac{1}{4}$  Wavelength shared Minima 3-4 = 0,333m. The possible pressure fluctuation in the tube is almost 10 times lower with antiresonant frequencies.

Da am offenen Ende niemals ein abschließender Druckbauch einer **stehenden** Welle auftreten kann, ist am geschlossenen Ende auch niemals ein Flußmaximum – auch nicht bei einem Imp. Magn. Minima, dies kann nur bei einem offenen Ende der Fall sein, der Fluss bei Antiresonanz ist niemals größer, sondern nur kleiner.



Frustum closed-open, L=2,0m Diameter closed (left end) 6mm, Diameter open (right end) 30mm, B=0,2 Openwind Simulation, Flow Distribution resonant Mode #3 (blue) and Antiresonant Frequ. above (yellow)

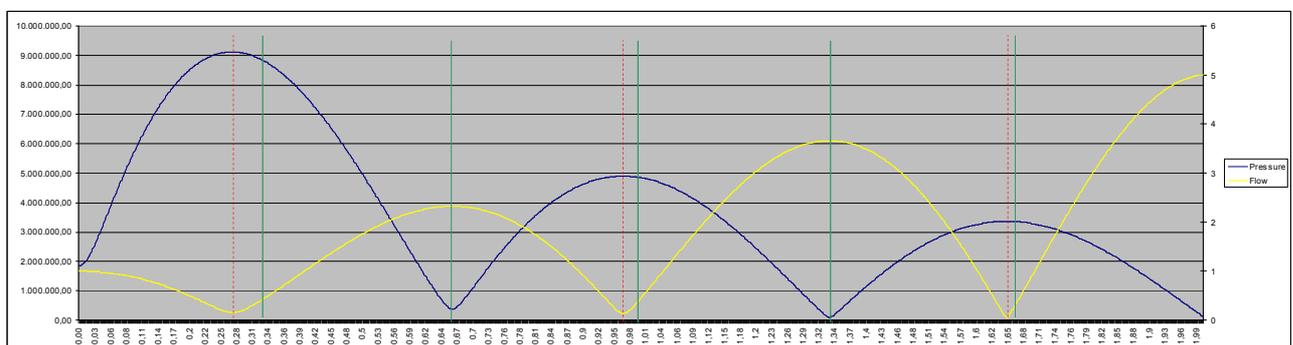
Impedanz Minima haben ebenso wie Resonanzmaxima eine Frequenz und dadurch eine zugehörige Wellenlänge. Konus mit Spitze und closed-open Frustum haben die besondere Eigenschaft, daß **Impedanz Minima=Antiresonanzen** immer an den selben Frequenzen auftreten, wo auch der einseitig geschlossene Zylinder diese hat. Nur bei dem closed Cyl. B=1,0 sind ¼ WL davon die Resonanzfrequenzen entfernt.

Je mehr das geschlossene Ende zu einer geschlossene Spitze verwandelt wird, umso kleiner wird der Abstand der Minima zum Vorgänger Impedanz Maximum und größer zum Nachfolge Maximum, weil diese nun erst bei höheren „Resonanz“ Frequenzen auftreten. Dieser Umstand ist bei Moden monoton aufwärts steigend immer weniger ausgeprägt, weil die höheren Modes wesentlich weniger weit aufwärts zu höheren Resonanzfrequ. verschoben werden.

Aber: Impedanz Minima = hier Antiresonanz Frequenzen werden nicht verschoben, solange eines der beiden Rohrenden geschlossen bleibt. (Die Frequenzdifferenzen anhand exaktem Phasen Nulldurchgang liegen <1 Hz bei den Antiresonanzen). Vergleiche dies mit den open-open Geometrien, wo Resonanzen nicht verschoben werden, diese sind allerdings dann ebenfalls bei Impedanz Minima.

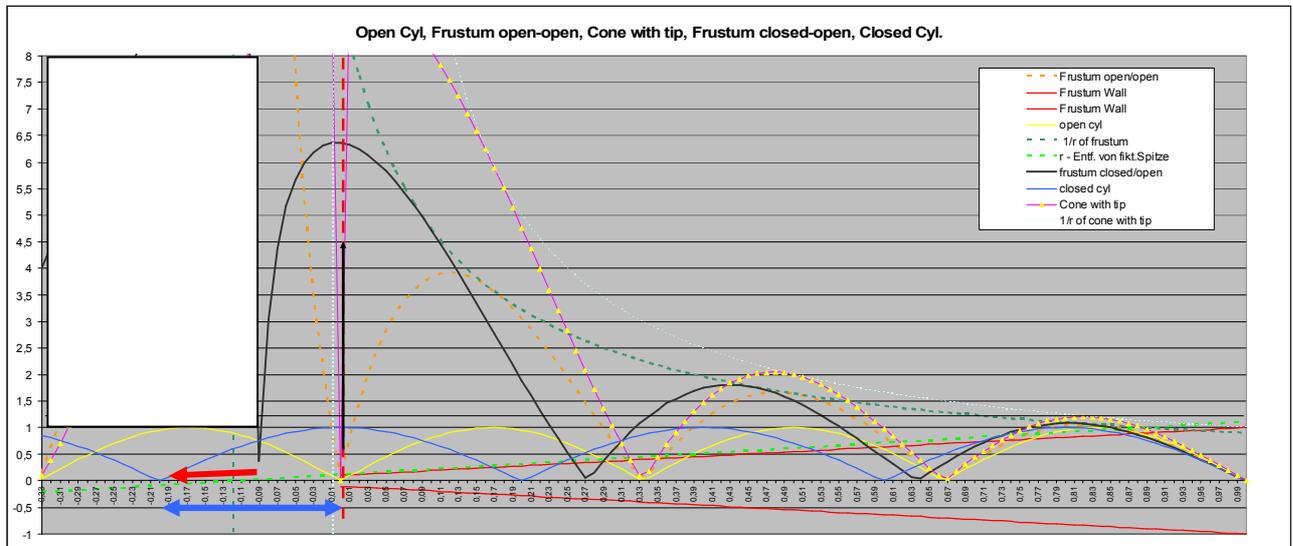
Impedanzminima haben daher einen Zusammenhang mit Druckknoten von „Antiresonanzen“ insofern, als diese am Input immer bei den selben Frequenzen und somit bei den selben Wellenlängen auftreten, auch wenn sich die Geometrie der Röhre vom reinen einseitig geschlossenen Zylinder stark unterscheidet und somit auch die Druck Maxima Hüllkurve, die sich aus dem Faktor 1/r ergibt, sehr unterschiedlich ist.

Da sich die Druckmaxima-(Hüll)-Kurven vom open-open und vom closed-open Frustum bei gleichem B-Faktor trotz unterschiedlicher Resonanzfrequenzen und Randbedingungen scheinbar nicht unterscheiden, kann davon ausgegangen werden, daß diese Druck-Hüllkurven auch bei Impedanzminima = Antiresonanzen nicht anders aussehen.



shared Minima 3-4 = Antiresonanz; Pressure Nodes and Flow Maxima are ½ Wavelength = 0,666m apart. Pressure antinodes and Flow Nodes are shifted, green markers = ¼ global wavelength from open end, red markers indicate the drift of pressure antinodes to the smaller end.

Impedanzkurve des geschlossenen Zylinders als Referenz

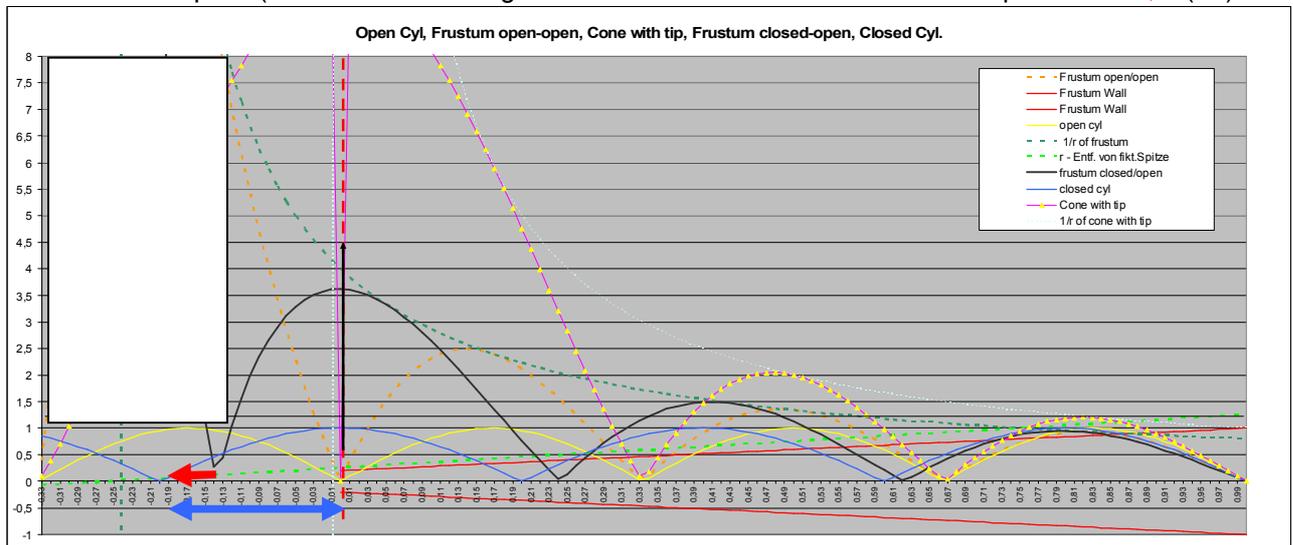


Mode #3, L=1m, Temp= 344 Grad,	Pr.Knotenabstd	Res.Fr. AR. Fr.
open Zyl. / Cone lower shared Minima Freq. (NT2<->3)	1/2 WL = 0,400 of L	430 Hz
gelb: Pressure open-open-Zyl or Cone B=1,0/0,0	1/2 WL = 0,333 of L	516 Hz
orange: Pressure open-open Frustum B=0,1	1/2 WL = 0,333 of L	516 Hz
schwarz: Pressure closed-open Frustum B=0,1	1/2 WL = 0,364 of L	472 Hz
blau: Pressure closed Cylinder B=1,0	1/2 WL = 0,400 of L	430 Hz
closed Zyl. higher shared Minima Freq: (NT3<->4)	1/2WL = 0,333 of L	516 Hz
closed Zyl. lower shared Minima Freq. (NT2<->3)	1/2 WL = 0,500 of L	344 Hz

Der CC Mode #3 ist Frequ. Fakt. 1,2 von shared Minima below, bzw 0,8 von above entfernt (arithm. Mitte). d. h. die Arithm. Mitte zwischen den Minima wäre hier 430 Hz (Peak Closed Zyl.),

Resonanzpeak #3 Frustum closed-open **B=0,1** ist von shared Minima below \* Faktor 1,372  
 ist von der shared Minima above \* Faktor 0,91  
 ist vom arithm. Mitte zw. Minima \* Faktor 1,1 entfernt.  
 -> Hier ist der **Peak #3 mit B= 0,1 ~ bei 50% der möglichen Freq. Änderung von Cone zu CC Freq.,**

Positionsverhältnisse der Knoten sind zwischen den Geometrien an jedem Punkt die selben, wobei CC = die arithm. Mitte Peak zwischen Knoten. Da es um die Resonanzfrequenz geht, ist das ident mit den Druckknoten Positions-/ WL-Längenunterschieden von hinten gemessen; -0,09 ist die Pos. des Knoten in der fehlenden Spitze (es fehlt hier die Länge zum Knoten des CC in der fehlenden Spitze bei -0,2. (rot)



schwarz: Pressure closed-open Frustum **B=0,2** 1/2 WL = 0,379 of RL Peak=454,1 Hz  
 shared Minima below: /1,32 above: \*1,137 von arithm. Mitte Minima \*1,056 entfernt. -0,137 RL fehlende Sp.

Da die Impedanz Minima Frequenzen=Antiresonanzen zumindest theoretisch sehr konsistent sind und vor allem für Vergleichsmessungen die simple Impedanz und Druckverteilung des closed Cyl. am geschl. Ende als Vergleichsbasis besser geeignet ist, hier die Frequenzverhältnisse der Geometrien als Änderungen zur Basis Closed Cylinder zusammengestellt.

Bei einer einseitig geschlossenen Geometrie sind Resonanzfrequenzen immer an Impedanz Maxima am geschl. Ende =Druckpot. Es gibt einen permanenten Frequenz-Faktor je Mode, um den der vorangehende tiefere Resonanz-Peak von der „shared“ Antiresonanz als Faktor der Antiresonanz-Frequenz entfernt ist, wobei es (vorerst ohne große Änderungen durch z.B Schallbecher, Mundstück) folgende Grenzen gibt:

B0,0 = closed Tip – open Cone, B-Faktor =0,0 weil Modesprung, hier ist das völlig mögliche Limit.

B1,0 = one side closed Cylinder. B-Faktor =1,0 wobei hier Peaks jeweils in der arithmetischen Mitte der Minima sind =  $\frac{1}{4}$  WL entfernt. (Die ART Simulation ergibt beim closed Cyl. ein Freq. Verhältnis, wegen Verlusten, daß etwas größer ist).

Closed Cyl with Std. RL = 1,0m & Speed 344m/s.		**A	**B	**C	**D	**E	**F
		1/1 WL=			AR	1WL x	
Der 1. Peak ist die tiefste Resonanz	1 86Hz =4m/1 = 4,00m	0,5=	1/2	0,5			-
Das folgende Minima (1.Antiresonanz)	2 172Hz =4m/2 = 2,00m				0,5x	RL/1	
Der 2. Peak = 2. ungerade	3 258Hz =4m/3 =1,33m	0,75 =	3/4	1,5			3/2=1,5
Das folgende Minima (2.Antiresonanz)	4 344Hz =4m/4 = 1,00m				1,0x	RL/2	
Der 3. Peak = 3. ungerade	5 430Hz =4m/5 = 0,80m	0,833=	5/6	2,5			5/4=1,25
Das folgende Minima (3.Antiresonanz)	6 516Hz =4m/6 = 0,66m				1,5x	RL/3	
Der 4. Peak = 4. ungerade	7 602Hz =4m/7 = 0,571m	0,875 =	7/8	3,5			7/6=1,166
Das folgende Minima (4.Antiresonanz)	8 688Hz =4m/8 = 0,50m				2,0x	RL/4	
Der 5. Peak = 5. ungerade	9 774Hz =4m/9 = 0,444m	0,9 =	9/10	4,5			9/8=1,125
usw.							

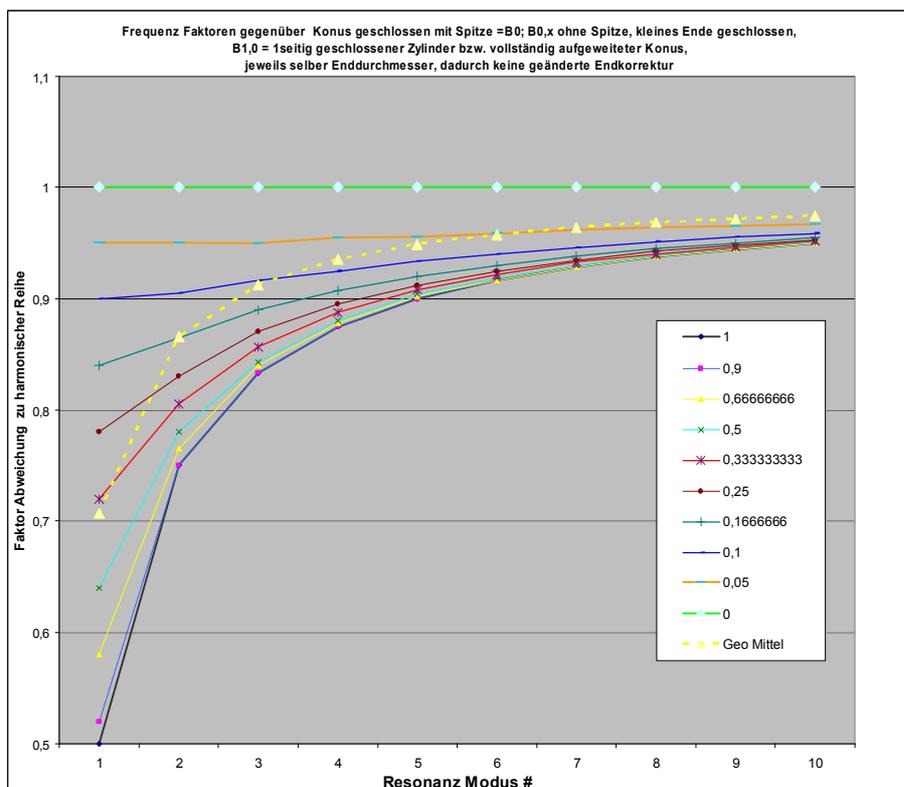
- \*\*A Peak before at next Min. Freq. \* = kleinst möglicher Faktor = untere Grenze = arithm. Mittelwert  
 \*\*B als Bruchzahl, Verhältnis von der Antiresonz. z.B. Peak 3 hat 5/6 der Freq. von shared Min. after.  
 \*\*C als Verhältnis zur 1. Antiresonanz, muß immer  $\frac{1}{2}$  WL = 2m ergeben  
 1st Imp. Minima = Frequenz, wo die Wellenlänge 2 \* in das Rohr passt (=1st Mode Res. of open cyl.)  
 \*\*D Anzahl ganzer Wellenlängen die der finalen Länge entsprechen müssen  
 \*\*E ergibt dann doppelt so viele  $\frac{1}{2}$  Wellenlängen, was wiederum die Größe und Anzahl der Druckknotenabstände ergibt, an denen die Impedanzminima = Antiresonanzen auftreten.  
 \*\*F Frequenzfaktor zur vorhergehender Antiresonanz = shared Min. untere Grenze = arithm. Mittelwert

Antiresonanzen treten also immer bei geradzahigen Vielfachen der  $\frac{1}{2}$  WL auf, die in das Rohr passen. Haben Impedanz Maxima das obige Frequenzverhältnis (A\*\* bzw. B\*\*) zum nächsten Minima, so sind diese in der arithmetischen Mitte der Antiresonanzen, was dem Minimum entspricht, solange sich der Rohrquerschnitt vom geschlossenen Ende nicht zum offenen Ende hin verjüngt/verringert.

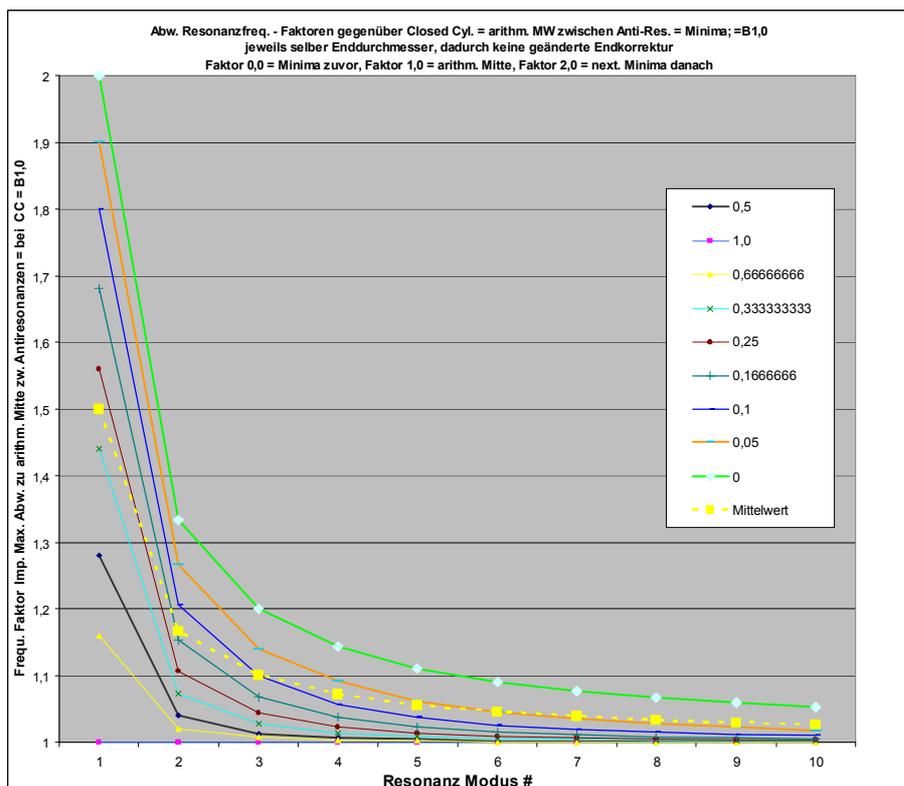
Dies sind Vergleiche der Extreme = Konus und geschlossener Zylinder. Die Annahme des unteren Limits gelten dann nicht mehr, wenn ein Mundstück und Schallbecher involviert wäre. Hier ist das untere Limit an der Stelle, wo ein Resonanzpeaks die beidseits gleichförmigste Gestalt hat, denn hier ist die Resonanz die arithm. Mitte der Minima zuvor und danach.

Ein Kesselmundstück verkürzt die akustische Länge bei tiefen Frequenzen = gibt höhere Resonanzfrequenzen der Modes und verlängert die akustisch wirksame Länge bei hohen Frequenzen = gibt tiefere Resonanzfrequenzen. Das jeweils obere Limit = 1,0 = nächst höhere Antiresonanz kann aber nicht überschritten werden! Höhere Frequenzen unterschreiten dann aber die arithmetische Mitte und somit die unteren Limits anhand der frequenzabhängigen akustisch wirksamen Länge des Mundstückes.

Andererseits müssen dadurch Resonanzfrequenzen vom vorangehenden Minima ein Frequenzverhältnis größer gleich der unteren Grenze (\*\*F) haben. Dies ist der Definitionsbereich für mögliche Peak Freq. eines Frustum closed-open mit B-Faktor zwischen 1,0 und 0,0.



B=0,0 = Impedanz Magn. shared Min. above-> würden zu Resonanzen sobald die Spitze geöffnet wird.  
 B=1,0 = Impedanz Magn. Max = Resonanzpeaks sind in der arithm. Mitte der Minimafreq. davor u. danach.



Die Faktoren Abw. zu harmonischer Reihe sind gleich dem Frequ. Verhältnis der Resonanzfrequ. zur nächst höheren Minimafrequenz und beschreiben den Versatz der Magnituden Peak Frequenz zu den Minima. D.h. die ermittelten Faktoren mal den Reziprokwert der jeweiligen Faktoren des CC =Closed Cylinder.

Die Verhältnisse des CC = B=1,0 = Mitte als Basis 1,0 und -> B=0,0 gibt dann die vollständige Abweichung von der arithm. Mitte der Resonanzpeaks (closed Zyl.) zwischen den Minima.



**Frustum closed-open:**

Die Minima Freq. bleiben / sind gleich mit dem Closed Cyl:

*tiefer Minima (2.Antiresonanz) 4 344Hz = 4m/4 = 1,00m WL RL/2 = 1/2 WL Knotenabstand = 0,50m*  
*höhere Minima (3.Antiresonanz) 6 516Hz = 4m/6 = 0,66m WL RL/3 = 1/2 WL Knotenabstand = 0,33m*  
*Resonanzpeak #3 closed Zyl 5 430Hz = 4m/5 = 0,80m WL RL/2,5 1/2 WL Knotenabst. = 0,40m*

Die Resonanzfrequenz ist entweder gemessen oder anhand der transzendenten Gleichung ermittelt:  
 B=0,2 Resonanz Mode 3 = **454,1Hz** / 430 Hz = arithm. Mitte = **1,056** Abw. zur Mitte  
 430Hz = 100%... 454,1Hz = 105,6% *d.h. die Frequenz ist nur 5,6% höher als CC.*  
 -> *beim Konus mit Spitze wäre sie 20% höher!*

B=0,2 bedeutet: das kleine geschlossene Ende ist 5x kleiner als das offene Ende, fehlende Spitze +25%

Daraus folgen:

Freq. / Speed = 1,32 ganze WL passen in das Rohr  
 w = Winkelfrequ. = 2 \* pi() \* Freq. = 2853  
 k = Kreiszahl = w / Speed = 8,294 rad  
 WL = 2\*pi()/k = 0,758 RL oder = Speed / Freq.  
 Knotenabstand = 1/2WL = WL/2 = 0,379 RL oder = 1/ Freq./Speed\*2  
 Wieviele 1/2 WL passen in Rohr 1/0,5WL = **2,640** oder = Freq./Speed\*2 oder = k/pi()  
 -> **das ist der Schnittpunkt transz. Formel**, CC = 2,5 Cone = 3,0  
 1. Fikt. Knoten bei 1-(Mode# \* 1/2WL) = -0,137 RL  
 1. tats. Knoten bei 1.Fikt Kn. + 1/2WL = **0,242 RL** oder: Abrunden auf Ganze im Rohr = 2 + Rest 0,64  
 Rest 1/2WL = 0,64 \* Länge 1/2WL = **0,2424 RL**

Die Resonanzfrequenz des Frustum definiert die Knotenabstände und Positionen der Druck-Knoten, sowie den Imp. Peak Versatz zur Mitte im Vergleich zum gleichlangen geschlossenen Zylinder (B=1,0).

Beim geschlossenen Zyl. ist/sind die Resonanzpeak Freq. alle Druckbauchmaxima dieser WL	in der arithm. Mitte in der arithm. Mitte	der AR Impedanz Minima Freq. der Druckknoten dieser WL
---	---	--

Beim Limit B=0,0 Konus mit Spitze sind die Druckbauchmaxima in der geometrischen Mitte zwischen Druckknoten (=immer kleiner als arithm.), bei Frustum closed-open zwischen den beiden Extremen.

Pos. <b>Druckbauch</b> Maxima Closed Cyl:	RL	RL	RL
Resonanz Mode #3	0	<b>0,4</b>	<b>0,8</b>
Antiresonanz zuvor bzw. früher anhand Druckkurve		0,25	0,75
Antiresonanz danach bzw. früher anhand Druckkurve		0,166	0,5 0,83

Pos. Druckbauch Maxima Frustum closed-open, mit B=0,2:

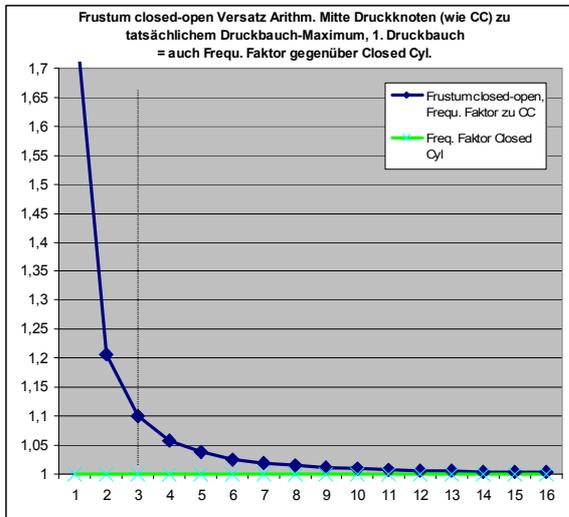
<b>Druckbauch Maxima ermittelt:</b>	<b>0,00 RL</b>	<b>0,41 RL</b>	<b>0,8 RL</b>
Druckknoten Frustum <i>fikt.</i> -0,137	<b>0,2424</b>	0,621	1,0
Arithm. Mittelwert Druckbauch ist bei Pos.	<b>0,0527 RL</b>	<b>0,432 RL</b>	<b>0,81 RL</b>
Diff. = Druckbauch Maxima Versatz zu CC =	-0,0527 RL	-0,022 RL	-0,01 RL

Nun muß von hinten, bzw. in 100 gerechnet werden, da die Wellenlänge reziprok zur Frequenz ist:  
 Länge ab hier bis zum offenen Ende 1- 0,0527 = **0,9473 RL ist equiv. CC Länge m. Freq. of Frustum**  
 Abweichung von Arithm. Mitte 1/ 0,9473 = **1,0556 Abweichung Peak Freq. zu CC = +5,6%**

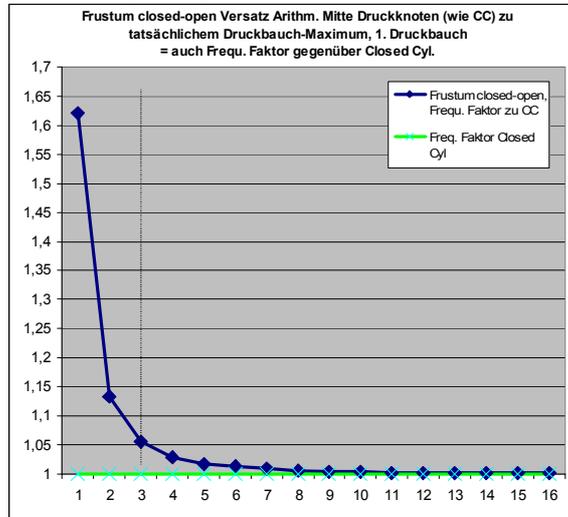
**Reverse Peak Freq. zu 1. Druckknoten Position Frustum closed-open:**

Hinweis: Die equiv. Peak Freq. des CC kann z.B. anhand der Root Freq. der Minima ermittelt werden!  
 1/ Freq. Fakt to Peak CC = eq. RL. CC für Peak Freq. of Frustum... 1/1,0556 = 0,9473 RL  
 1- eq. RL CC = Druckversatz = arithm. Mitte vor 1. Druckknoten Frustum 1-0,9473 = 0,0527 RL  
 Versatz + 1/4 WL = Speed/Peak Freq. Frustum/4 = Pos. 1. Druckknoten -,- 0,0527RL + 0,189RL = **0,2424RL**

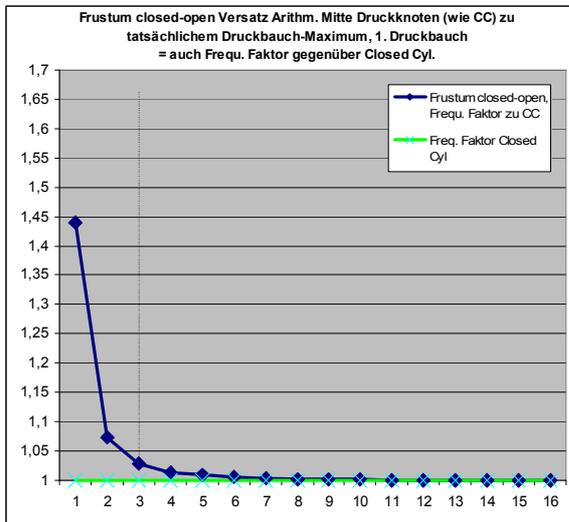
Peak Freq. – Faktoren Frustum closed-open zum closed-open Zylinder:



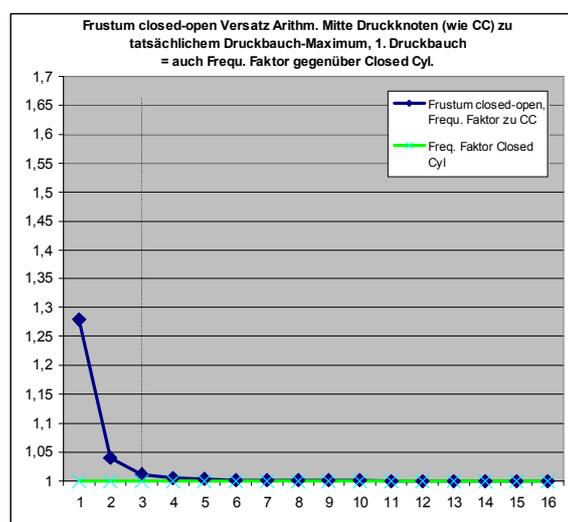
bei B-Faktor 0,1



bei B-Faktor 0,2

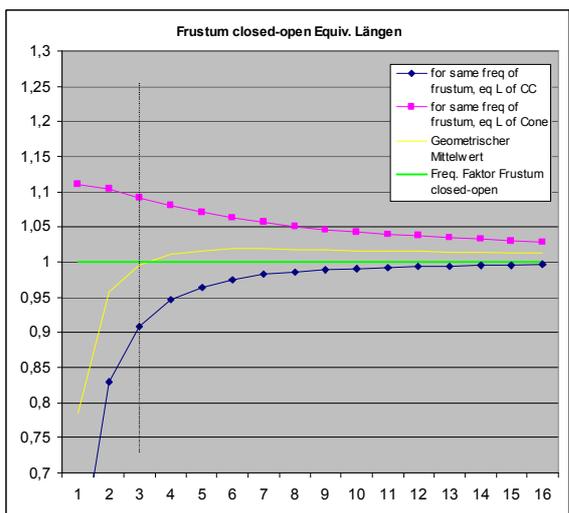


bei B-Faktor 0,33

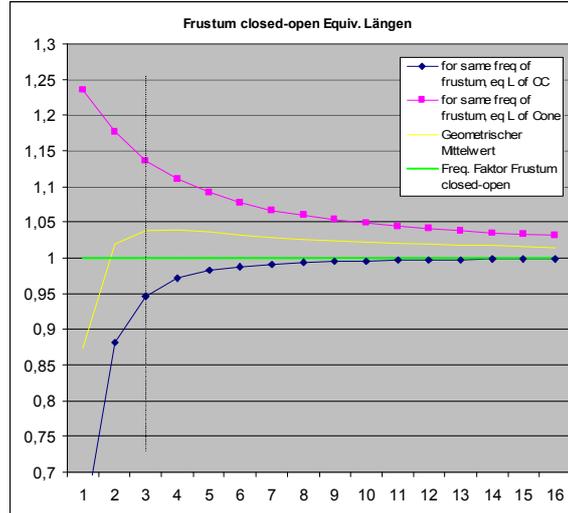


bei B-Faktor 0,5

1/Equ. L of closed Cyl. gibt Versatz 1. Druckbauchmaxima bei 0 zu arithm. Mitte:



bei B-Faktor 0,1



bei B-Faktor 0,2

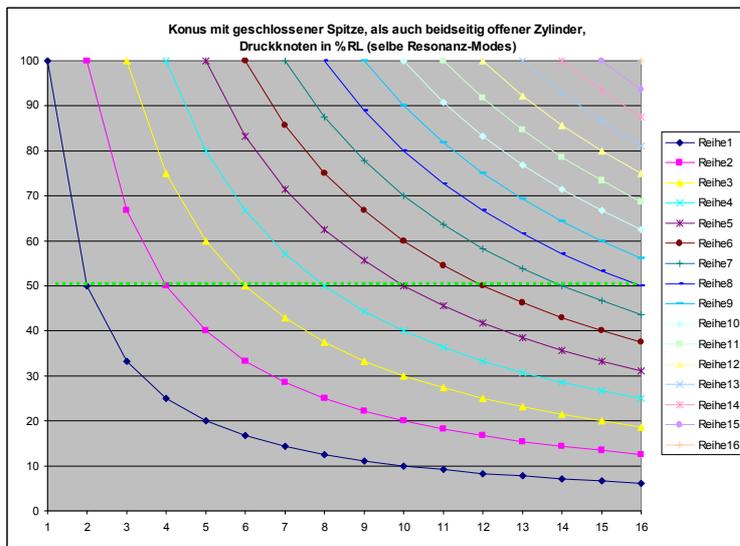
Position des 1. Druckknoten im Frustum closed-open =  $(1 - (1 / \text{Equiv. L closed Cyl.})) + \frac{1}{4}WL$  Peak Frustum oder:  $( \text{Mode# - 1} ) - ( \text{Freq./Speed*2} ) * ( \text{Speed / Freq. / 2} )$

Da bei der Impedanzmessung der Druck zu (minimalem Fluss) am Punkt des geschlossenen Endes dargestellt wird, ist dies vorerst der einzige Ansatzpunkt für die Übersetzung der Peak Freq. aus der Impedanz- in die Druckprofilkurve. Die weiteren Abweichungen der Druckbäuche sollten sich aus der passenden Druck-Profilkurve anhand B-Faktor ergeben. Das Druckmaximum wandert von der Geometrie zwischen Druckknoten zur arithm. Mitte zwischen Druckknoten.

Man könnte eine Tabelle pro Mode erstellen, welcher B-Faktor dem Frequenz Versatz der Resonanzfrequenz zur arithm. Mitte des CC dem Versatz des 1. Druckbauchmaximums annähernd entspricht. Der max. Freq. Faktor von Mode 3 wäre z.B. 1,2 für den Konus mit Spitze am 1. Druckbauch.

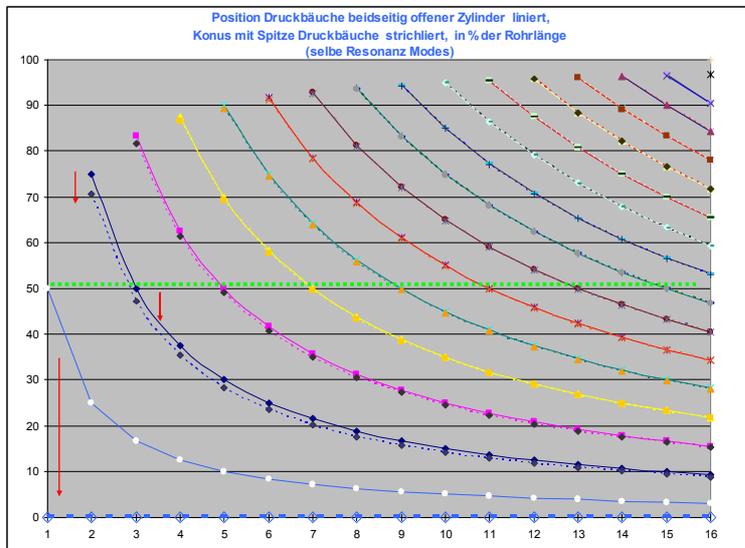
Aber zum Glück gibt es ja Simulationssoftware.

Grafische Übersicht Druckverteilung in den verschiedenen Geometrien:

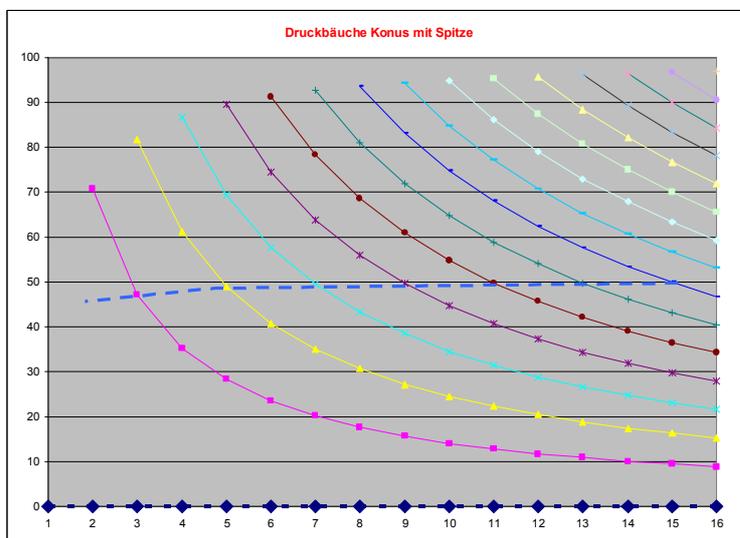


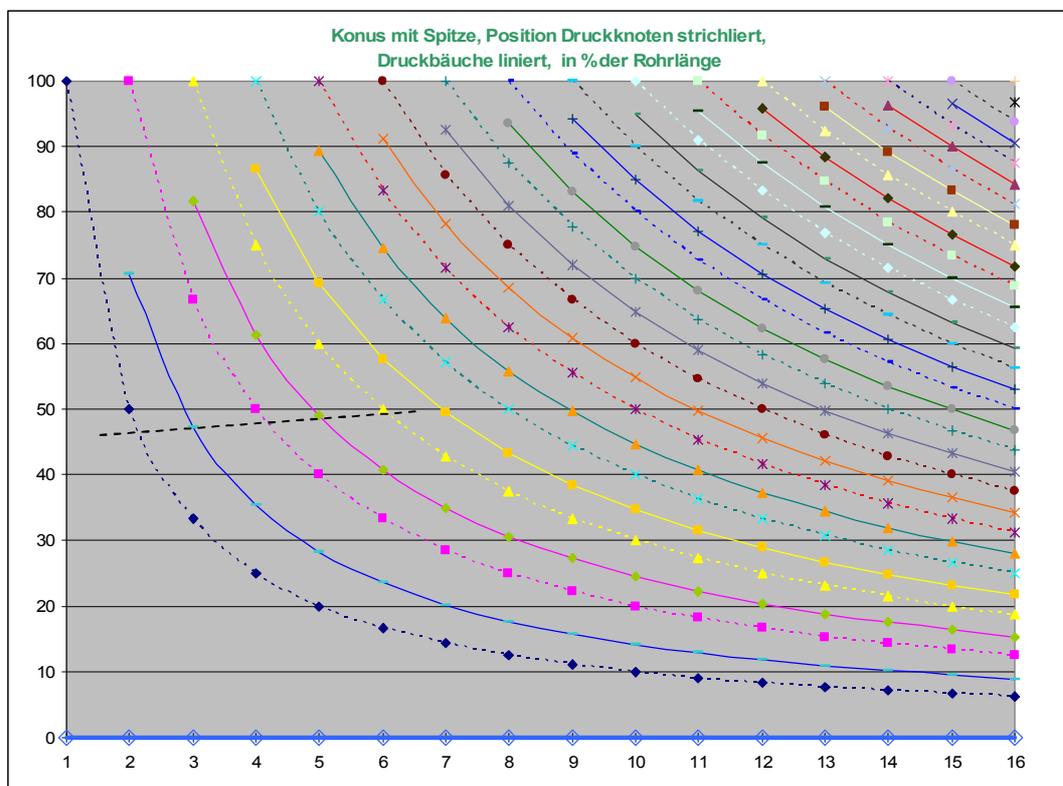
(auch Frustum open-open!)

$x = 1-16 = \text{Resonanzmodes}$ , Reihe # = Knoten Nr.,  $y = \text{Länge}\%$ , 0=Kegelspitze, 100 = offenes Ende



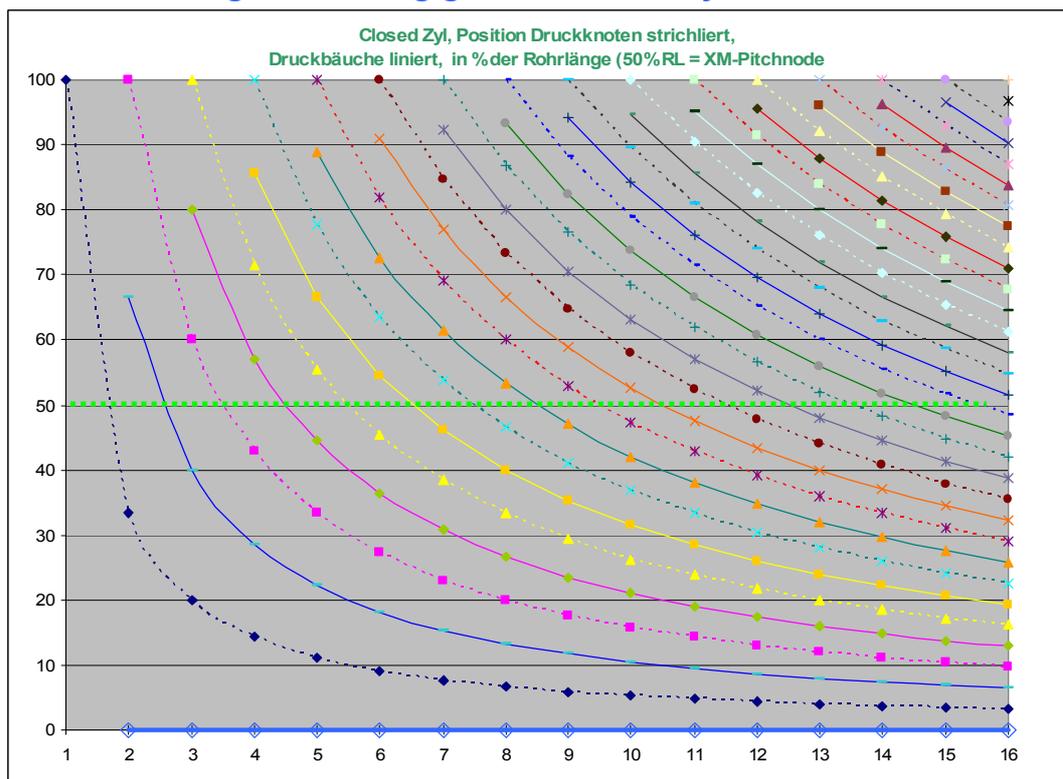
**Frustum open-open:** Druck-Knoten bleiben an selber Position, Bäuche verschieben sich Richtung kleines Ende bzw max.wenn **Spitze = closed:** 1. Druckbauch ersetzt Druckknoten am Beginn: **1 Knoten weniger.**





XM-Magnituden Nodes bei 50% gilt exakt nur bei Druckknoten (even Modes), tiefste Druckbäuche Mode 1/3/5 liegen vor 50 %, (wegen steilerer 1/R Kurve), schwarz strichliert Die Druckbäuche (Pressure Antinodes) = Flussknoten sind Richtung Spitze versetzt  
Abstände Pressure Nodes zu Antinodes sind weniger als 1/4 WL, Antinodes zu Nodes mehr als 1/4 WL  
Druckbauch Maxima liegen in der geometrischen Mitte zwischen Druckknotenpositionen.

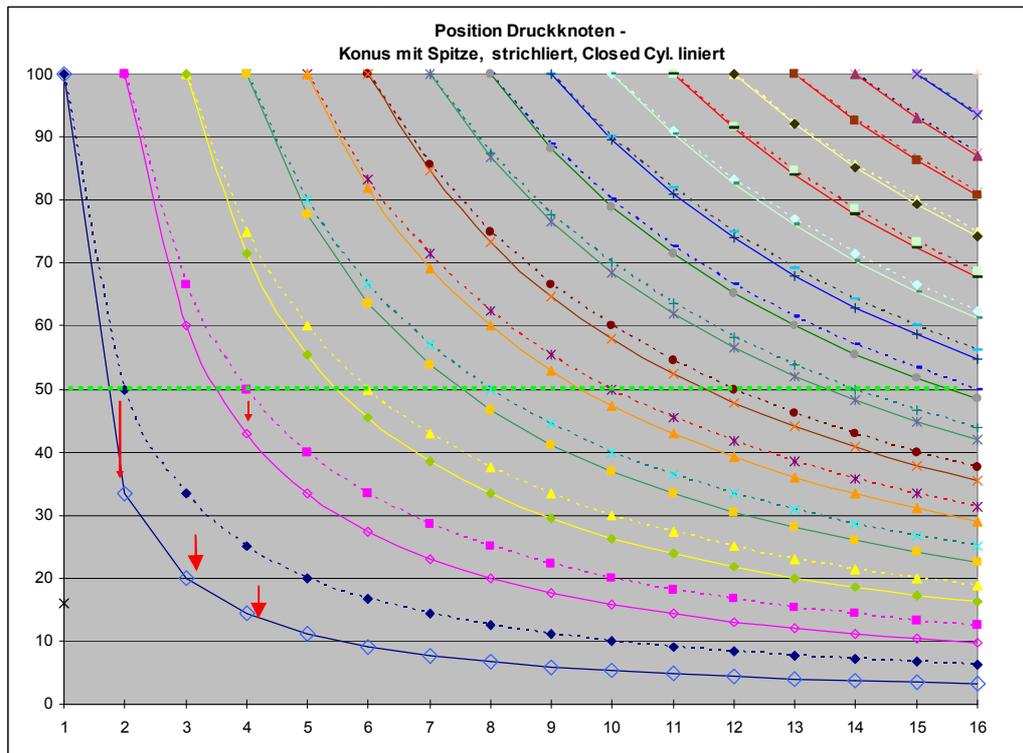
### Druckverteilung im einseitig geschlossenen Zylinder:



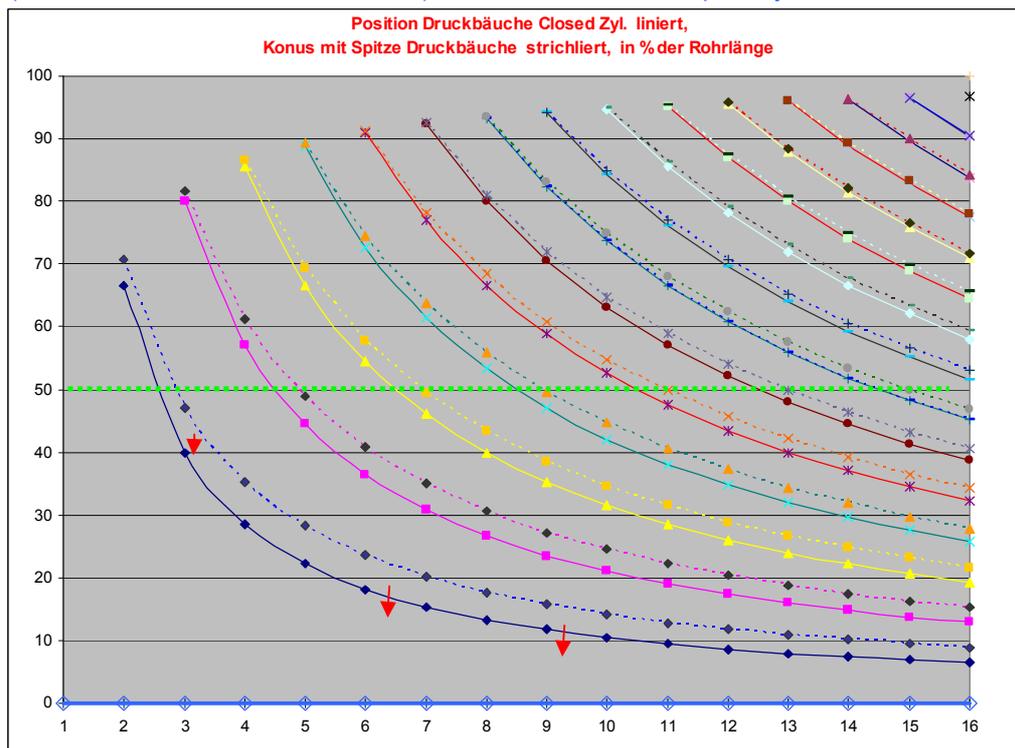
Abstand Pressure Nodes zu Antinodes ist hier jeweils 1/4 WL. Frequenzen sind tiefer=größere WL+Abstände  
Druckbauchmaxima (=Flussknoten) liegen in der arithmetischen Mitte zwischen Druckknoten Positionen

Druckverteilung Konus mit Spitze vs. einseitig geschlossener Zylinder:

Cone with closed Tip and (larger) open End vs. closed-open cylindrical tube:



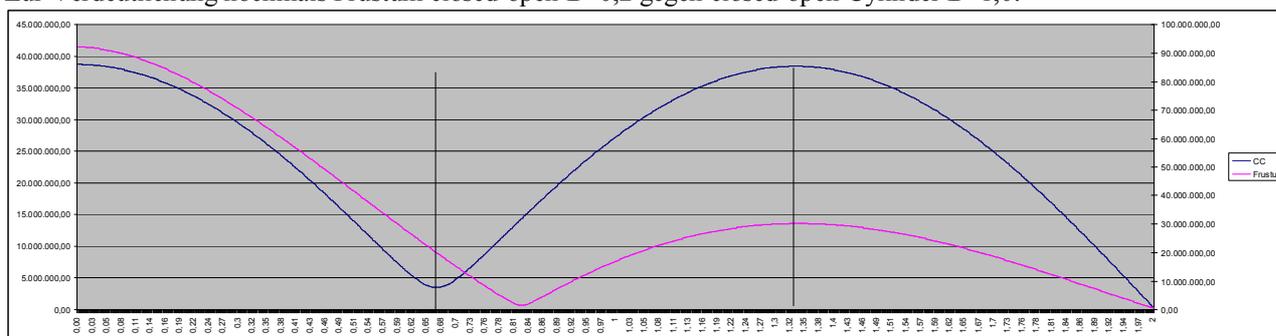
Wenn Druckknoten näher Richtung kleines geschlossenes Ende liegen = tiefere Frequenzen bei closed cyl. Frustum closed-open: Pos. liegen dazwischen; aber bereits bei  $B > 0,1$  ca.  $\frac{1}{2}$  Weg,  $B > 0,5$  fast vollständig. Druckknoten Positionen = Flussbauch Maxima Positionen, aber nicht max. Pitch Pot./ Magn. Nodes (diese sind näher am kleinen Ende) und nur beim closed-open Cylinder an Druckknoten.



Frustum closed-open: Druckbäuche wandern sehr schnell zum kleinen Ende, sind bereits bei  $\sim B > 0,25$  an den Positionen des geschlossenen Zylinders, welches das Limit darstellt. Druckbäuche =(max. Pitch Pot und annähernd Zin Magnituden Nodes), das Pitch Pot wandert aber ebenso nahe Druckknoten schneller und liegt somit immer vor Druckknoten anhand  $1/r$ .

Der „vollständige“ Konus mit Spitze und größerem offenen Ende ist eine reine Hypothese, wenn wir dieses Objekt vom geschlossenen Ende aus betrachten. Eine Impedanz Messung an der geschlossenen Spitze (Endfläche = 0) ist nicht möglich. Eine Messung der Resonanzfrequenz wäre daher nur am offenen Ende möglich.

Zur Verdeutlichung nochmals Frustum closed-open B=0,2 gegen closed-open Cylinder B=1,0:

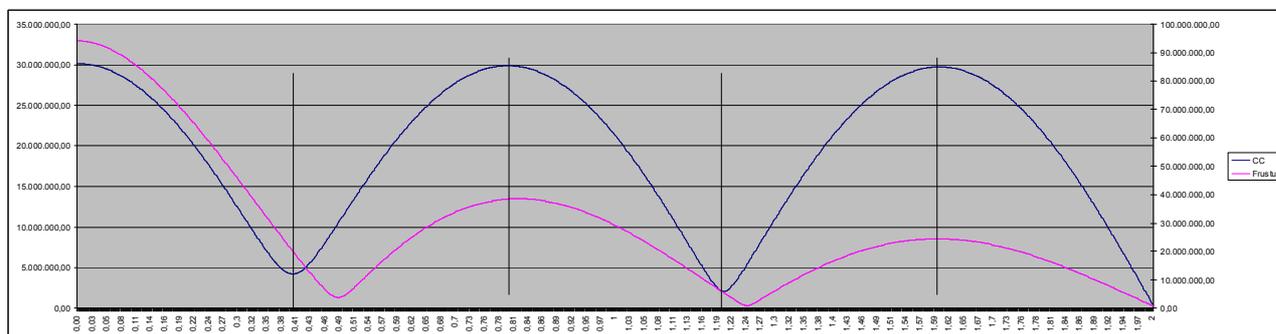


Druckverlauf, Resonanz Mode #2; Rohrlänge 2m, Cylinder Dia 10mm, Frustum: 6-30mm.

Druckknoten bilden sich anhand der Wellenlänge (vom offenen Ende rechts);

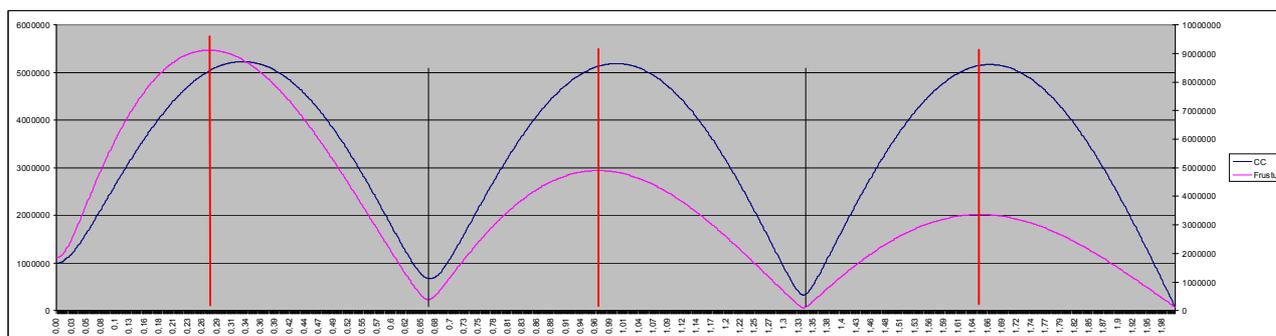
$\frac{1}{2} WL = 1,33m$  im closed-open Cylinder,  $\sim 1,18m$  im Frustum = 12,7% höhere globale Frequenz.

Die Positionen der Druckbauchmaxima (und Flussknoten) sind aber auch bei geringen B Werten (hier B 0,2= offenes Ende 5x größer) noch annähernd an den Positionen im CC.



Selbes Beispiel, aber nun Res. Mode #3.  $\frac{1}{2}$  Wellenlänge im CC = 0,8m und im Frustum = 0,75m

Die globale Resonanzfrequenz beim Frustum ist 6,6% höher. Druckbauch Maxima Positionen sind aber annähernd nicht versetzt.



Antiresonanzen: Diese ändern sich nicht, solange eine Ende geschlossen und das andere offen ist;

Hier die Antiresonanz (shared Minima) zwischen Resonanz Mode #3 und #4,  $\frac{1}{2} WL = 0,66m$ .

Wenn sich die Resonanzfrequenz nicht ändert, ändern sich auch die Druckknotenpositionen nicht.

Allerdings ändern sich nun die Druckbauch Maxima (und Flußknoten) Positionen:

$2,5 * \frac{1}{2} WL = 1,73m = \frac{1}{2} WL = 0,692m * 3 =$  should fit the tube = 2,076m, verhalten sich also wie wenn sie in einem closed-open Cylinder mit 3,8% größerer Länge wären (some type of endcorrection).

### Positionen Druckverhältnisse Closed Zyl.

Kn#	at %RL															
Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	100,00															
2	33,33	100														
3	20,00	60	100													
4	14,29	42,86	71,4	100												
5	11,11	33,33	55,6	77,8	100											
6	9,09	27,27	45,5	63,6	81,8	100										
7	7,69	23,08	38,5	53,8	69,2	84,6	100									
8	6,67	20	33,3	46,7	60	73,3	86,7	100								
9	5,88	17,65	29,4	41,2	52,9	64,7	76,5	88,2	100							
10	5,26	15,79	26,3	36,8	47,4	57,9	68,4	78,9	89,5	100						
11	4,76	14,29	23,8	33,3	42,9	52,4	61,9	71,4	81	90,5	100					
12	4,35	13,04	21,7	30,4	39,1	47,8	56,5	65,2	73,9	82,6	91,3	100				
13	4,00	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100			
14	3,70	11,11	18,5	25,9	33,3	40,7	48,1	55,6	63	70,4	77,8	85,2	92,6	100		
15	3,45	10,34	17,2	24,1	31	37,9	44,8	51,7	58,6	65,5	72,4	79,3	86,2	93,1	100	
16	3,23	9,677	16,1	22,6	29	35,5	41,9	48,4	54,8	61,3	67,7	74,2	80,6	87,1	93,5	100

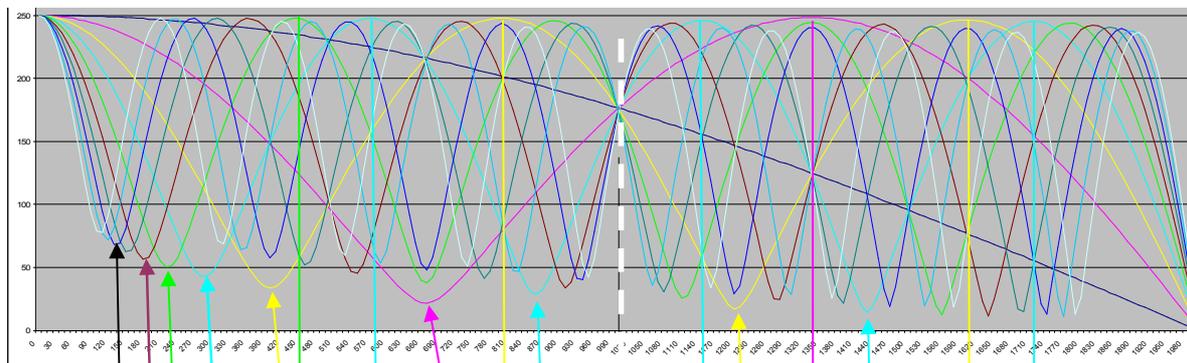
Bauch #	at % RL															
Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1																
2	0	66,67														
3	0	40	80													
4	0	28,57	57,1	85,7												
5	0	22,22	44,4	66,7	88,9											
6	0	18,18	36,4	54,5	72,7	90,9										
7	0	15,38	30,8	46,2	61,5	76,9	92,3									
8	0	13,33	26,7	40	53,3	66,7	80	93,3								
9	0	11,76	23,5	35,3	47,1	58,8	70,6	82,4	94,1							
10	0	10,53	21,1	31,6	42,1	52,6	63,2	73,7	84,2	94,7						
11	0	9,524	19	28,6	38,1	47,6	57,1	66,7	76,2	85,7	95,2					
12	0	8,696	17,4	26,1	34,8	43,5	52,2	60,9	69,6	78,3	87	95,7				
13	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96			
14	0	7,407	14,8	22,2	29,6	37	44,4	51,9	59,3	66,7	74,1	81,5	88,9	96,3		
15	0	6,897	13,8	20,7	27,6	34,5	41,4	48,3	55,2	62,1	69	75,9	82,8	89,7	96,6	
16	0	6,452	12,9	19,4	25,8	32,3	38,7	45,2	51,6	58,1	64,5	71	77,4	83,9	90,3	96,8

### Positionen Druckverhältnisse Konus mit Spitze

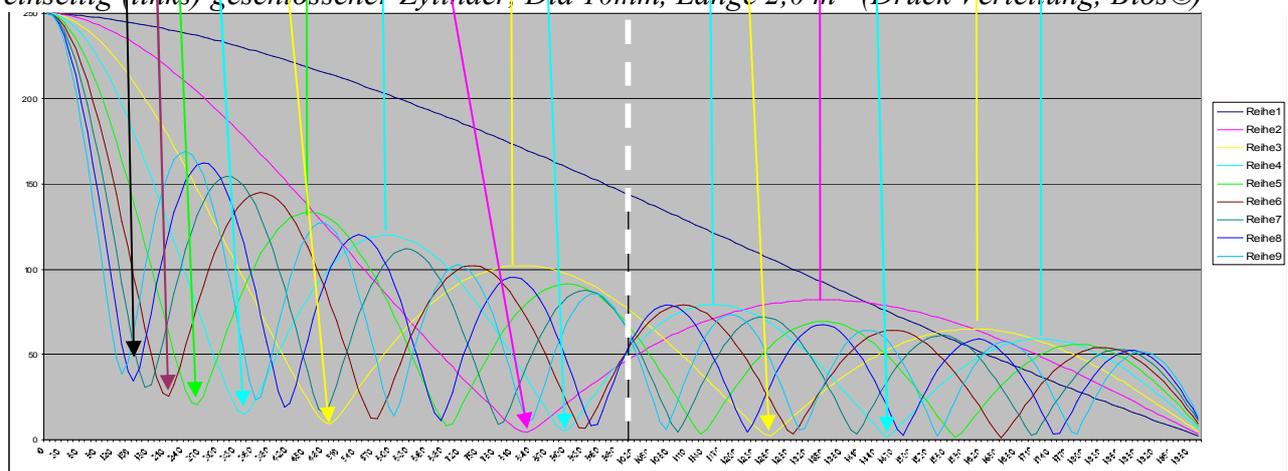
PrNode#																
Mode#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	100															
2	50	100														
3	33,3	66,7	100													
4	25	50	75	100												
5	20	40	60	80	100											
6	16,7	33,3	50	66,7	83,3	100										
7	14,3	28,6	42,9	57,1	71,4	85,7	100									
8	12,5	25	37,5	50	62,5	75	87,5	100								
9	11,1	22,2	33,3	44,4	55,6	66,7	77,8	88,9	100							
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100						
11	9,09	18,2	27,3	36,4	45,5	54,5	63,6	72,7	81,8	90,9	100					
12	8,33	16,7	25	33,3	41,7	50	58,3	66,7	75	83,3	91,7	100				
13	7,69	15,4	23,1	30,8	38,5	46,2	53,8	61,5	69,2	76,9	84,6	92,3	100			
14	7,14	14,3	21,4	28,6	35,7	42,9	50	57,1	64,3	71,4	78,6	85,7	92,9	100		
15	6,67	13,3	20	26,7	33,3	40	46,7	53,3	60	66,7	73,3	80	86,7	93,3	100	
16	6,25	12,5	18,8	25	31,3	37,5	43,8	50	56,3	62,5	68,8	75	81,3	87,5	93,8	100

Druckbauch #																
Mode#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0															
2	0	70,7														
3	0	47,1	81,6													
4	0	35,4	61,2	86,6												
5	0	28,3	49,0	69,3	89,4											
6	0	23,6	40,8	57,7	74,5	91,3										
7	0	20,2	35	49,5	63,9	78,2	92,6									
8	0	17,7	30,6	43,3	55,9	68,5	81	93,5								
9	0	15,7	27,2	38,5	49,7	60,9	72	83,1	94,3							
10	0	14,1	24,5	34,6	44,7	54,8	64,8	74,8	84,9	94,9						
11	0	12,9	22,3	31,5	40,7	49,8	58,9	68	77,1	86,2	95,3					
12	0	11,8	20,4	28,9	37,3	45,6	54	62,4	70,7	79,1	87,4	95,7				
13	0	10,9	18,8	26,6	34,4	42,1	49,9	57,6	65,3	73	80,7	88,4	96,1			
14	0	10,1	17,5	24,7	31,9	39,1	46,3	53,5	60,6	67,8	74,9	82,1	89,2	96,4		
15	0	9,43	16,3	23,1	29,8	36,5	43,2	49,9	56,6	63,2	69,9	76,6	83,3	89,9	96,6	
16	0	8,84	15,3	21,7	28	34,2	40,5	46,8	53	59,3	65,6	71,8	78,1	84,3	90,6	96,8

## Auswertung closed-open Zyl. vs. Frustum closed-open, $B=0,2$



einseitig (links) geschlossener Zylinder, Dia 10mm, Länge 2,0 m (Druck Verteilung, Bios©)



Frustum closed-open, kleines Ende 6mm, großes Ende offen 30mm, 2m Länge,  $B=0,2$  0,68 Grad. (Druck Verteilung, Bios©), Die **Druckknoten** haben je  $1/2$ WL Abstände, **Druckbäuche** aber nicht. Diese befinden sich (beinahe bereits) an selber Stelle wie beim (tieferen) geschlossenen Zylinder.

Da sich Frequenzen von Antiresonanzen aber nicht (bzw. kaum) verändern = nicht erhöhen, müssen deren Druckknoten ebenfalls an Positionen sein, wie im closed-open Zylinder, d.h. näher am geschlossenen Ende.

### Kurze Zusammenfassung dieses Kapitels:

Druckknotenpositionen werden durch  $1/r$  nicht versetzt und geben so wichtige Informationen über die Positionsverhältnisse zu Maxima und zu benachbarten Antiresonanzen.  $1/2$  WL Abstände liefern oder ergeben sich anhand der Resonanzfrequenz. Nur bei den reinen Zylindern (open oder closed) sind Druckbäuche (und Flussknoten) in der arithmetischen Mitte der Druckknoten / Flußbäuchen,  $1/4$  WL der Peak Freq. voneinander entfernt = in der arithmetischen Mitte und somit wechselseitig „austauschbar“. Bei Geometrien mit Hornfunktion = 0 (Zylinder, Frustum, Konus) ist der Abstand vom offenen Ende für die Druckknotenpositionen ausschlaggebend. Bei Hörnern funktioniert das nicht, denn hier ist das effektive offene Ende frequenzabhängig bereits innerhalb der Hornöffnung.

### Vorschau auf Teil 2c: Auswirkungen von lokalen Perturbationen:

Druckmaxima = Flußnodes sind prinzipiell immer zur kleineren Seite versetzt (abhängig vom B-Faktor). An deren Positionen findet sich prinzipiell immer das max. mögliche globale Pitch-Veränderungspotential, ebenso  $\sim 1/4$  Wellenlänge zuvor, in jedem Fall von Druckknoten zum kleinen Ende versetzt, bei höheren Modes fallen diese Positionen dann auch mit Magnituden-Nodes zusammen/ bzw. „verschmelzen“.

Das max. Input Impedanz Magnituden-Pot. anhand von lokalen Perturbationen weicht auch bei Zylindern und tiefen Modes in Richtung geschl. Ende anhand eines „Staumauer Effekts“ ab. (Abnehmender Druck in Röhren, stetig abnehmendes Magn.Potential), wobei hier Messungen stark von Simulationsergebnissen abweichen.