Stimmung und Intonation bei Blechblasinstrumenten

Mensuränderungen und deren Auswirkung bei Trompeten.

Part 2D: Einzelkomponenten und ihre Eigenschaften: Mundstücke, Schallbecher, Hörner und die Hornfunktion

Projektstand per 9.3.2025, Revision 20.0

Die aktuellste Version dieses Dokuments finden Sie auf der Projektseite:
http://www.preisl.at/brassissima/

Begleitende Dokumentation zum Projekt / Thema.
Development, Work, Calculation and Copyright:

brassissima
The fantastic world of Brass Instruments

(="Brass Instrument Scanning System – Impedance Measurements & Analysis")

Hermann Preisl

Altwaidhofen 45
3830 Waidhofen/Thaya, Austria

brassissima@preisl.at

P.S.: Wer systematische Fehler, Schwachsinn oder falsche Behauptungen findet:

Bitte diese **nicht !!** behalten,
sondern bitte um kurze Info an mich, das hilft mir sehr weiter, danke!

Inhalt:

Streifzug und Überblick 4
Begriffe richtig gedeutet, Formel-Sammlung, Zusammenhänge Zeit und Raum 5
Äquivalente Längen von Blechblasinstrumenten 6
Unterschiedlichste Mensuren und Formen anhand historischer Signalhörner 7
Ein Cruix mit einseitig geschlossenen „Zylindern“ oder doch nicht? 8

Komponenten von Blechblasinstrumenten und deren grundlegene Funktion

Mundstück
Das Mundstück und dessen Abschnitte, Messungen 9
Modellbezeichnungen können irreführen 10
Q-Faktor und „Aufbohren“ der Seele – Auswirkungen 12
Gewichte, Booster und Masse generell 13
Mundstück Receiver & „GAP“ 13

Helmholtz Resonanzen und äquivalente Längen von closed Zylindern 14
Ermittlung der eL CC, Beispiele gängiger Modelle (inkl. Mundrohr) 15
Simulierte Änderung der MPC Eq. CC Länge Mundstück, Kesseldvolumen / Seele 16
Berechnungen lt. Cardwell (Patent 1970), Resonatoren 16
Abstecher zum Gesamtinstrument: Phasengeschwindigkeit in „flaring Horns“ 17
Mundstück, generelle Formel und experimentielle Ermittlung MPC EL über Frequenz 17
Einige besonders interessante Simulationen an Trompeten Mundstücken + Instrument 18
Vergrößern, Verkleinern von Durchmessern (Volumen), völliges Weglassen des Kessels 19

Mundrohr / zylindrische Abschnitte
Mundrohr/Leadpipe/Leaderpipe, verwendete Geometrien, Patente 21
Zylindrischer Rohrabschnitt, Gaps, Boresize, Brassiness-Faktor, Schmettern 23

Schallbecher
Schallbecher = Impedanzwandler, höhere Phasengeschwindigkeit = akustisch kürzer 23
Schallbecherformen, Übersicht und Patente 24

Salmon Hörner – Schalltrichter mit konstanter Cutoff Frequenz 26
Salmon Hörner – Berechnung Geometrie 27
Hörner als passive Verstärker, Transmission Coeffizient, Abstrahlung, Richtcharakteristik 28
Hörner als Resonatoren - welche Variablen ändern sich? 29
Transmission Coefficient ist nicht gleich einem Längen-oder Geschwindigkeits-Faktor 29
Längenfaktoren von Exponentialhörnern, ein Korrektur- und Anpassungsversuch 30

Horngestalt und Differentialrechnung
Horngestalt und Differentialrechnung 31
Wachstum / Krümmung der Steigung 31
Ableitungen mit Hilfe der zentralen Differenzen-Formeln 32
Die Bedeutung der abgeleiteten Werte / Funktionskurven, Limes 32
Radius oder Querschnitt-Änderung: 34
Graphisches Ableiten – Beispiel 34
Kurvendiskussion - geometrische Bedeutung der höheren Ableitungen 34

Finite Hörner im Detail:
Katenoid Hörner 35
Exponential Hörner 36
Konisches Frustum (Kegelstumpf), closed-open 37
Hyperbolic cosine & Hyperbolic sine Waveguides 38
Weitere Formeln für einfachere Geometrien, der Vollständigkeit halber 38
Konus mit Spitze, Frustum open-open, Zylinder open-open, closed-open
Endkorrektur an offenen Horn- / oder Rohrenden, Viskothermale und Abstrahlungsverluste

„Webster“ Horngleichung - ein Annäherungsversuch 39
Wellenfunktion Ψ (PSI) / Schrödingergleichung Quantenmechanik, Tunneleffekt 39
Ebene Wellenfronten, Hornfunktion 39
Schallbecher in der Praxis, Radius der äußeren Hornkontur, Hornfunktion „U“ 40
Sphärische Wellenfronten am Schallbecherende, Modellierung, Berechnung, Koordinaten 41
Beispiel Berechnung mit ~in etwa Bb-Trompeten Dimensionen eines Besselhorns 42
Tunnel-Effekt und Potential-Barriere von Schallbechern unter Annahme spährischer Fronten 44

Bessel Hörner, Berechnung Geometrie und Resonanzen 44
Bessel Hörner, Fitting Parameter und die Hornfunktion „U“ 47
Berechnungsergebnisse des beispielhaften Besselhorns mit ~ Bb-Trompeten-Dimensionen 47
Weitere, aber sehr überschlägige Gedanken zur Dimensionierung von Schallbechern 48

Hörner im direkten Vergleich:
Teil A: Hörner – (closed-open) im direkten Vergleich, Hornlänge 1m, B=0,2 49
Transmission Coefficient, Einfluß als „Potential-Generatoren“, Längenfaktoren 49
Vorhandenes Potential das abstrahlt, wird weniger reflektiert 50
Formeln vs. ART Simulation (Ebene Wellen), Abweichungen
Teil B: Kürzere Hörner - Hornlänge 0,5m, B=0,2 (selber Endurchmesser wie im Teil A:) 52
Teil C: Hörner mit größerem Ende, Hornlänge 1,0m, B=0,1 (2facher Endurchmesser gegen A:) 54
Vergleich der Hörner, Fazit: 55

Streifzug und Überblick:

Im Teil 1 und 2A meiner Arbeit habe ich die Themen Musikkunde und akustische Basisgrundsätze beleuchtet. Es wurden einige für Blechblasinstrumente spezifische Grundthemen und Zusammenhänge gezeigt. Ich habe lange überlegt ob es nicht besser wäre immer alle Details zu Einzelthemen wie z.B. Mundstücken oder Schallbechern immer gesammelt zu dokumentieren, bin aber zum Schluß gekommen, daß es doch besser ist, diese jeweils komplexen Themen aufzusplitten. Dadurch soll es Interessierten möglich sein in die Materie einzutauchen und sich einen Überblick verschaffen zu können, ohne von allen Details „erschlagen“ zu werden.

Teil 2B und 2C haben sich daher mit akustischen Eigenschaften scheinbar simpler Geometrien ausführlich beschäftigt, die für Blechbläser wohl vorab nicht hilfreich, praktisch und interessant erscheinen werden, allerdings eine Basis für das Verständnis komplexer Geometrien von Blechbasinstrumenten bieten sollen.

Ich gehe daher in diesem Abschnitt nur teilweise auf Grundlagen ein, die bereits in vorherigen Teilen behandelt wurden und versuche darzustellen, welche Komponenten in welchem Umfang an Stimmung, Ansprache und Tonproduktion und Spielbarkeit bei Blechblasinstrumenten ihren Anteil haben werden.

Hieraus sollten sich für mich Ansätze und das Rüstzeug zum Auffinden von Design Fehlern, als ev. auch Design Ideen ergeben. Verschiedene Auswirkungen und Abweichungen sollten so den jeweiligen Komponenten und deren Proportionen gut bzw. gezielt zugeordnet werden können, auch um daraus letztlich mit Hilfe lokaler Perturbationen Korrekturmöglichkeiten zu erarbeiten und umzusetzen.

Für diejenigen Leser, die Instrumente nicht verändern möchten, sondern lediglich die Zusammenhänge besser verstehen möchten, kann sich der eine oder andere Leitfaden zu „Do“ und „Dont’s“, wie auch ein Wegweiser z.b. für eine zielgerichtete Mundstückwahl ergeben.

Passiver „Verstärker“ bzw. Impedanz-Wandler vs. musikalische Hörner:

Zahlreiche Forschungsergebnisse zu Hönern entstanden im Zusammenhang mit der Erfindung des Gramophons, später Tonfilm, etc. und einer möglichst hohen „Lautstärke“ an die Außenwelt. Hier sollten für ein „Hifi“ Erlebnis möglichst alle Reflektionen innerhalb des Horns vermieden werden. Im Gegensatz dazu ist für „musikalische Hörner“ eine möglichst passende frequenzabhängige Reflektion innerhalb des Resonators erwünscht, denn dies fördert die beim Lautsprecherhorn unerwünschten „stehende Wellen“.

Die heutigen Möglichkeiten von Computer Simulationen / Optimierungen basieren auf theoretischen Erkenntnissen der Vorzeit. Sie fördern aber nicht ein Verständnis um die zugrunde liegenden komplizierten akustisch relevanten Abläufe und Zusammenhänge für Otto-Normalverbraucher (Trompeter, Blechbläser).

In fast jedem wissenschaftlichen Dokument findet sich rasch die sogenannte „Webster Horngleichung“ bzw. eine „Schrödinger Form“ anhand Quantenmechanik. Gleichzeitig wird aber auch oft auf Grenzen dieser Theorie verwiesen, z.B. wie gewölbt eine sphärische Fläche nun tatsächlich sein könnte und wie eine Abstrahlung tatsächlich abläuft. Deshalb versuche ich auch einige Entdeckungen und Patente in diesem Zusammenhang genauer zu erkunden und zu hinterfragen, die lange vor dem Computerzeitalter entstanden sind.

Die „Webster“ Horngleichung in 1-Parameter Form basiert auf „ebener Wellenausbreitung“ innerhalb des Instruments, welche in zylindrischen Rohren (bei geringer Druckamplitude) vorherrschen sollte. In freier Umgebung breiten sich Schallwellen aber dreidimensional kugelförmig mit einer daher „sphärischen“ Wellenfront aus. Im Fall des linearen Konus/Frustum sollte das auch innerhalb dieses Resonators der Fall sein, wenn diese Theorie stimmt.

Begriffe, richtig gedeutet:

Frustum	=	Kegelstumpf, Konus mit fehlender Spitze
Apex/Vertex	=	Spitze
Throat	=	(Hals) .....Verengung / Einschnürung / (Mundstück-Seele)
Mouth	=	(Mund) .....gemeint ist immer das größere, offene Ende -->
flare, flaring	=	Ausladung, ausladend, erweiternd (->> Richtung Schallbecher)
tapered	=	zugespitzt, verjüngt, konisch (<<- Richtung Mundstück)
MPC Cup	=	Mundstück Kessel (teilweise egal welche geometrische Form)

Umrechnungsformeln: *Freq.Faktor nach Cent & vs., Wellenlänge, etc.*

Kreisfläche	S = pi * (r²)	oder pi * (d²) / 4
Radius aus Kreisfläche	√ (S / pi)	
Kreisumfang (Perimeter)	2 * pi * Radius	oder Durchmesser*pi
Freq. Faktor nach Cent:	Log(Faktor;2) * 1200	1/Frequ. Faktor = Längenfaktor
Cent nach Freq. Faktor:	2^(1/1200)^Cent	
λ = WL Wellenlänge in m:	Speed m pro Sek / Frequenz in Hz,	Equiv. L Fundamental Cone = c / 2 f
¼ WL Wellenlänge in cm:	(Speed/Frequenz)*100/4	Equiv. L Cyl.Fund. closed-open = c / 4 f
Schalldruck oder Ohm in dB	=20*log10 (Pascal oder Ohm)	log. dB nach linear Ohm = 10^(dB/20)
-6db = 50%, -3dB= 70,71%	-20dB = 10% +6dB= 200%	100 Mohm = 160dB
Kraft F=m*a (Masse * Beschl.)	=kinetisch, potentielle Kraft: F= -k*x	-k =Federkonstante, x = Auslenkung

Zusammenhänge von Zeit – und Raum Einheiten (in Metern und Sekunden):

Wellenlänge, Wellenzahl und Kreiswellenzahl sind die räumlichen Analogien zu den zeitlichen Größen Periode, Frequenz und Kreisfrequenz.

T	Periode =2pi/ ω	=	Kehrwert der Frequenz	= 1 / f Sek/~	Δt Phasenlaufzeit: Δt = φ° / 2pi * f
f	Frequenz	=	Kehrwert der Periode	= 1 / T ~/Sek,	f = φ° / 2pi * Δt
		=	Speed / Wellenlänge		
f	Root (n=1)	=	Speed / (Wellenlänge * n)		*mit steigender Frequ.:*
(1/ λ)	Wellenzahl (WL k)	=	**Kehrwert** der Wellenlänge	= 1 / λ	*steigt linear diagonal*
		=	Faktor Freq. zu Speed c	= f / c	*= **k** / 2*pi*
ω	Kreisfrequenz	=	**Frequenz * 2 * π**	= 2 * π/ T	*Zahl steigt stark diag.*
	= Winkelfrequenz	=	*Angular Frequ.* = ***Radiant/Sek*** = Kreisumrundungen/T, ω = *k* * c		
π	Konstante Pi	=	½ Umrundung Kreis (180 Grad)	= π = 3,14...	=1/2 Schwingung
rad	Radiant = Bogenmaß	=	1* Umrundung Kreis (360 Grad)	= π * 2 = 6,28...	= 1/1 Schwingung
rad	=1,0	=	Verhältnis Kreisbogen/6,28..	1 rad=360/2pi	*=1WL / 6,28...*
Phasenwinkel phi φ°	in rad	=	w * t, Winkeldifferenz 2er Wellen φ°(w)		= arctan (w /w0)
cos	(*phi φ°*) Winkelfunktion		eilt sin +90 Grad = ¼ λ voraus	cos (π /2)	= 0
sin	(*phi φ°*)			sin (π/2)	= +1
tan		=	Steigung=(dy/dx),(sin φ°/cos φ°)	arctan (tan)	= phi φ°
λ	Wellenlänge	=	Geschwindigkeit / Frequenz	= c / f	= T * c, = 2π / *k*
k	**Kreiswellenzahl**	=	Wellenzahl * 2 * π	= (1 / λ) *2 * π	*steigt linear diagonal*
	(*angular Wave Number*)		spatial Frequency	= 2 / (π * λ)	
			Radiant pro m	= (2*π *f) / c	*½ Pi wo Freq = ¼WL*
($k^2 = w^2 / c^2$	bzw. $1/c^2 * w^2$).		*k* =	= **ω / c**	*1Pi wo Freq =1/2 WL*
				= 2*π / λ	***2Pi wo Freq = 1 WL***
k(n)			*/Mode (n)*	= π	
k(n)			/ π	= *Mode # (n)*	

Mittlere Phasengeschwindigkeit, nicht dispersierend (=c0): *Wellengleichung:*

c od.v Speed od. Velocity	=	Wellenlänge / Periode	=	λ / T	$c^2 = w^2 / k^2$
in free Space	=	Wellenlänge * Frequenz	=	λ * **f**	*Schallausbreitung:*
	=	Frequenz / Wellenzahl	=	f / (WL)**k**	*(1/c= Δt für 1m)*
	=	Kreisfrequenz / Kreiswellenzahl	=	**ω / *k***	

Phasengeschwindigkeit (pv)	~	c0 /		[1- (WL/ WL cut off)²]	(bei Exponentialhorn)
Phasengeschwindigkeit (pv)	=	c0 /	√	[1- (WL/ WL cut off)²]	(bei Katenoid)
Gruppenlaufzeit (gv):	=	c0 *	√	[1- (WL/ WL cut off)²]	
Guided Wavelenght (WLg):	=	WL /	√	[1+ (WL/ WL cut off)²]	
Zeitkonstante (t):	=	1 / (2*pi * Fc)	= 1/ w *cutoff*		*=1/Grenzkreisfrequenz*

Äquivalente Längen (eL) von Blechblasinstrumenten und deren Komponenten:

Erinnerung:
Ein geschlossener Zylinder kann mit einem offenen Zylinder mit selber Querschnittfläche ohne Reflektion verlängert oder verkürzt werden = die resultierende Zylinderlänge kann kürzer oder länger gestaltet werden. Die resultierenden Resonanzfrequenzen werden dadurch höher oder tiefer, aber das wussten wir bereits.

Das Konzept der äquiv. Längen beschreibt anhand der Resonanzfrequenzen eines komplizierten Systems die dazu erforderlichen (berechenbaren) Längen eines viel einfacheren, gut verstandenen Systems.

Da ein Ende von Blechblasinstrumenten verschlossen - und zumindest Teile zylindrisch sind, wird hier als Vergleichsreferenz gerne ein **einseitig geschlossener Zylinder=CC**=closed Cylinder verwendet (-> Var. A).

Die äquivalente Länge = akustisch frequenzabhänge wirksame Länge einzelner Komponenten kann einzeln definiert werden, oder als Summe – dann aber mit Interaktionen untereinander - der gesamten Anordnung.

1. MPC Mundrohr Mainbore Schallbecher alle getrennt betrachtet
2. MPC + Mundrohr
3. alle Teile in ihrer Gesamtheit mit Mode-matching Effekten.

Es ist in diesem Fall jene erforderliche Länge eines Zylinders, der (Bauteile) eines Blechblasinstrumentes ersetzen könnte, und dann anstelle der (Bauteie) die selben Resonanzfrequenzen in Kombination mit dem (Rest-)Instrument ergeben würde. Die äquivalente Closed Cylinder Länge variiert stark mit der Frequenz.

Var. A:
Man spricht von einer Länge, die ein einseitig geschlossener Zylinder (CC) bei selbem Resonanzmode und gleicher Frequenz und gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit haben würde. Die effektive Länge (L) eines „idealen“, aber einseitig geschlossenen Zylinders, der die vollständige Naturtonreihe abbilden soll (n=1,2,3,4..) ist aber nicht konstant, sondern ist proportional zu eL = (L+**Endkorr**) * (**[(2n)-1] / (2n)**), allerdings ist hier nicht berücksichtigt, daß Reibungseffekte in engen Rohren gegen einer Endkorrektur (offener Enden) überwiegen - siehe Sideletter #2, und bleibt daher nur eine grobe Näherungsformel.

Instrument oder Komponente, anhand ermittelter Resonanzfrequenz, (Messung oder Berechnung):

Geschlossener Zylinder -> Resonanzfreq. (n) = Speed * (2n -1) / 4 * L *n=1,2,3,4,..*
Äquiv. Zylinderlänge (n) = Speed * (2n -1) / 4 * Resonanzfreq.

Var. B:
Man spricht von einer Länge, die ein beidseitig offener Zylinder (oder ein Konus mit Spitze) bei selbem Resonanzmode und gleicher Frequenz haben würde. (Jeweils falsche Randbedingung am kleinen Ende, detto realistisch notwendige Endkorrekturen), aber diese beiden Geometrien liefern die erwünschten Frequenzverhältnisse 1:2:3:4.... = Naturtonreihe, welche einen Vergleich von Stimmungsabweichungen vereinfachen, denn die „ideale“ effektive Länge hat hier einen konstanten Wert.

Offener Zylinder oder Konus -> Resonanzfreq. (n) = Speed * (n) / 2 * L *n=1,2,3,4,..*

Var. C:
Man kann Var. B: in folgende Aussage umwandeln:
Die effektive Länge des Resonanzmodes ist n * 1/2 Wellenlängen (WL) einer Welle selber Frequenz, die sich in „freier“ Luft / Umgebung kugelförmig ausbreitet. WL = Speed / Frequenz.

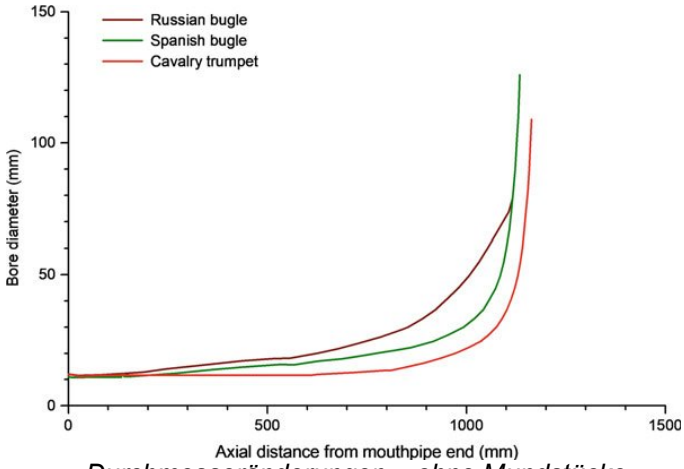
Äquiv. ½ WL in free-Air (n) = (Speed * n) / (2 * Resonanzfreq.)

Hier wird das Problem von Endlängenkorrekturen offener Enden vorerst umgangen, und es deutet sich bereits an, daß sich Schallwellen innerhalb z.B. eines Schallbechers frequenzabhängig mit anderen (höheren) Geschwindigkeiten als der Schallgeschwindigkeit in „freier“ Umgebung ausbreiten. Eine bessere Erklärung ist aber, daß sich die effektive Phasengeschwindigkeit nicht ändert, sondern tiefe Freqenzen wesentlich früher reflektiert werden und dadurch eine kürzere Strecke/Zeitspanne zurücklegen.

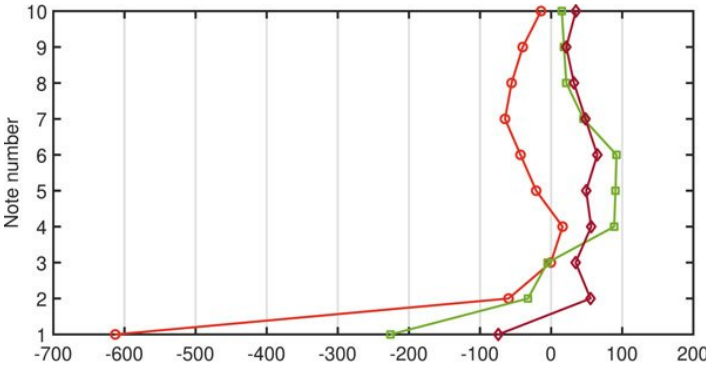
Varianten B und C haben den Vorteil, daß die „ideale“ effektive Länge ein konstanter Wert ist.
EFP = Equivalent Fundamental Pitch bzw. virtual root Frequenzen (n=1) in Hz: EFF(n) = f (n) / n

Unterschiedlichste Mensuren anhand einiger historischer Signal-Hörner:

Abbildungen ohne Mundstücke



Durchmesseränderungen – ohne Mundstücke

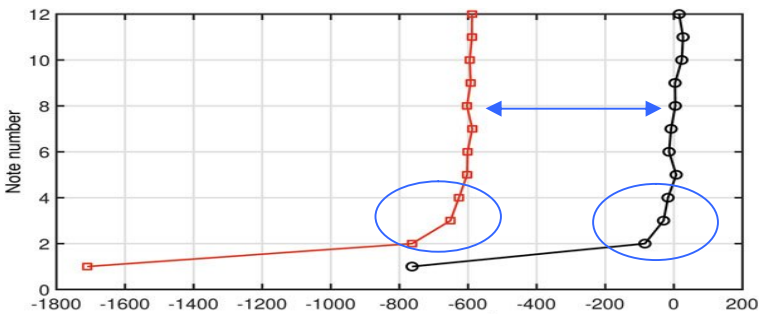


Abweichung Cent EFP von kl. c mit 130,8 Hz +/-100 Cent = ein Halbton

Die unterschiedlichen grausamen Stimmungsabweichungen samt Mundstücken, (hier nicht abgebildet) sind. Der überraschende Sieger in diesem Trio ist punkto Intonation das russische Horn mit ~exponential Flare und quasi keiner vorhandenen, markanten „Stürze"! (Impedanzwerte sind nicht abgebildet und „bescheiden")

Selbstverständlich wurden solche Instrumente nicht für einen „Konzertgebrauch" gebaut und auch mit der spanischen Variante können „Nachrichten" akustisch übermittelt und vom Empfänger „entschlüsselt" werden! Solche Signalinstrumente haben lange vor unserer Smartphone und Internetzeit ihren Zweck erfüllt!
„Akustische QR-Codes samt Fehlerkorrektur " wie.: Ta-tö-ti-ta-tö ! Tititatatütütö! Tötati! Tötata! wurden immer weniger geheim, dafür repräsentativer und kunstvoller; siehe Retrait, Zapfenstreich, "Taps".

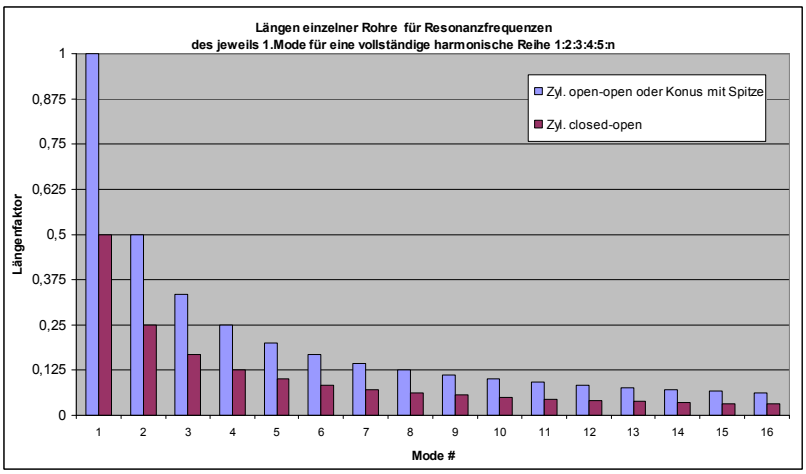
Harmonizität - Situation bei engen Mensuren, anhand einer „modernen" Posaune:



Eine Conn 8H Bb Tenor Posaune (ohne ein Quartventil) mit einem Dennis Wick 5AL Mundstück; Abweichung in Cent Equivalent Fundamental Pitch (EFP); 1. Zugposition = schwarz, 7. = Zugposition rot. Mode #2 wird durch mehr zyl. Anteil wesentlich inharmonischer, es gibt aber zusätzliche „Mode-matching" und weitere Effekte, die die Harmonizität und Bespielbarkeit unterschiedlich beeinflussen. (Hinweis: Bei der Zugposaune kommen noch Effekte anhand der Durchmesser-Sprünge mit ausgezogenem Zug hinzu.)

Ein Cruix mit einseitig geschlossenen „Zylindern“ oder doch nicht?

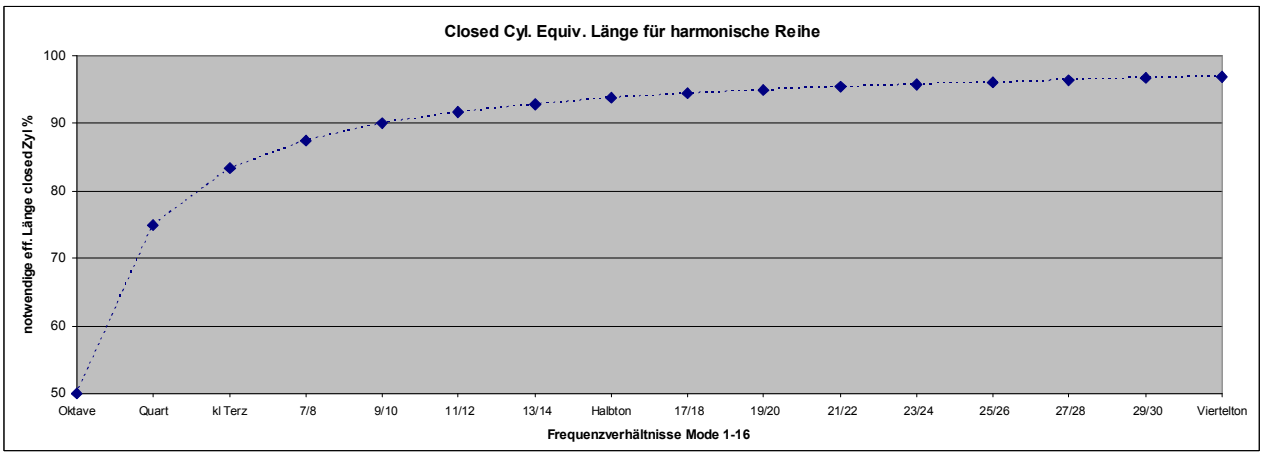
Stellen wir uns ein „idealisiertes Röhrenglockenspiel“ vor, wo die einzelnen Rohrlängen so gewählt würden, daß deren Grundtöne (Mode #1) eine vollständige Naturtonreihe abbilden. Da bei einseitig geschlossenen Rohren Mode 1 gleich ¼ WL entgegen ~1/2WL ist, sind closed-open Zylinder bei selber Grundresonanzfrequenz dann immer nur halb so lang.



Eine Halbierung der Rohrlänge und damit Wellenlänge verdoppelt deren Resonanzfrequenz (bei beiden Systemen). (Effekte durch Durchmesser, Endkorrekturen, Reibung, etc.) werden hier der Einfachheit halber nicht berücksichtigt.)

Sollen nicht nur Grundtöne, sondern auch alle höheren Resonanzmoden =„Naturtöne“ mit den Frequenzen der Naturtonreihe übereinstimmen, so müsste ***ein einzelner einseitig geschlossener Zylinder*** *mit aufsteigender Frequenz und Mode #n* ***fortlaufend****, für jeden Naturton um den* ***Längenfaktor: [(2n)-1] / (2n)gekürzt werden...****.*

Es sei denn*, man bedient sich Geometrien u. Mensuren (Hörner, Mpc, Perturbationen),die den notwendigen und daher erwünschten „akustisch wirksamen“ Längenunterschied gezielt z.B. durch lokal geänderte Phasengeschwindigkeiten verursachen und dadurch die vorgegebene physische Länge durchgehend möglichst unverändert bleiben kann!*



Die notwendigen Frequenzverhältnisse und auch entsprechende musikalische Intervalle sind in der Grafik eingetragen! Interessanterweise erinnert eine solche Grafik an einen Schnitt durch ein imaginäres Hornprofil... (-Länge = +Radius)

Wir müssen / dürfen uns weiterer Hilfsmittel und Tricks bedienen, damit Blechblasinstrumente laut sind, aber dennoch starke Resonanzen gebildet und zu den Lippen zurückreflektiert werden. Alle diese Tricks werden die Resonanzfrequenzen gegenüber einem geschlossenen Zylinder dermaßen verändern, daß dieser selbst am Ende kein Thema mehr ist. Es ist so gesehen also gut, daß diese physikalsiche Tatsache zutrifft.

Diese Feststellung ist meine abschließende Einleitung zu den Themen in diesem Abschnitt. Es sollen vor allem die Komponenten betrachtet werden, die für diese großen akustisch wirksamen Längenunterschiede gegenüber einem geschlossenen Zylinder verantwortlich sind, das sind Schallbecher und Mundstück.

Komponenten von Blechblasinstrumenten und deren grundlegende Funktion:

Prinzipiell bestehen alle Blechblasinstrumente aus folgenden Komponenten und Bestandteilen, die jeweils für sich eine sehr grundlegende Funktion haben, diese sollen nur kurz umrissen werden. Manche Angaben beziehen sich hier auf Größen von Bb-Trompeten.

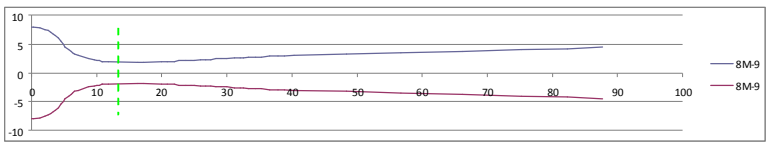
Das Mundstück als Ganzes und dessen Abschnitte:

Oftmals als das wichtigste Teil überhaupt beschrieben ist es einerseit die Schnittstelle zu den Bläserlippen und wirkt als passiver Helmholtz-Resonator durch die Kombination mit einem (Kessel oder Trichter) Volumen und einer Einengung (Seele), die fließend in einen Backbore / Stengel übergeht.

Ein Mundstück alleine wird unter anderem durch seine 1. Resonanzfrequenz = Mouthpiece Popping Frequenz charakterisiert, aber auch die Resonanzgüte dieser Popping Frequenz (Breite/Höhe) der Impedanzmaxima. Das Mundstück ändert in Verbindung mit den restlichen Komponenten die Resonanzfrequenzen und deren Magnituden stark. Prinzipiell senkt das Mundstück bei Trompeten höhere Resonanz-Frequenzen wesentlich stärker ab als mittlere; die untersten Resonanzen werden erhöht.

Mundstück / Helmholtz-Resonator, Länge äquivalenter geschlossener Zylinder:

Länge eines equ. cl. Cyl. at very low Freq. = **Gesamtvolumen** Resonator / Querschnitts-**Fläche** Zyl.
Länge eines equ. cl. Cyl. at MPC Popp Freq. = Speed / (4 * MPC Popp. Freq.) *=1st Mode cl. Cyl., die Zylinderlänge ist hier ¼ WL der Popp. Frequ.*



Die Innenkontur der Kombination Warburton 8M Kessel und Nr.9 Stengel (Backbore). (Schraubbar, 2-teilig) Trp. Mundstück, dieses wurde bei den ART Simulationen und FFT Messungen verwendet.

Ein kleineres Kesselvolumen hebt die 1. Popping Frequenz, ein größeres Stengelvolumen hebt ebenfalls die 1. Popping Frequenz. Eine größere Bohrung der Seele oder Verkürzung der Seele senkt die Resonanzgüte des Mundstückes/Magnitude und senkt somit den Gesamteinfluß, den das Mundstück ausübt.

Bei „Wald"-Hörnern liegt die 1. Poppingfrequ. z. B. über dem üblichen Spielbereich, bei Bb Trompeten im schon „hohen" Spielbereich ~ bei rund 850 Hz (+/- 100 Hz). Höhere MPC Resonanzen sollten weit entfernt liegen, bei Trp. ca. 2-5 x höher als die MPC Popp. Frequ. sein. Höhere Resonanzen bilden sich aber erst weit oberhalb des Spielbereiches durch eine Mindestlänge des Mundstückes, kürzere Flügelhorn- oder Kornettmundstücke alleine bilden keine weiteren Resonanzfrequenzen (unter ~2500 Hz).

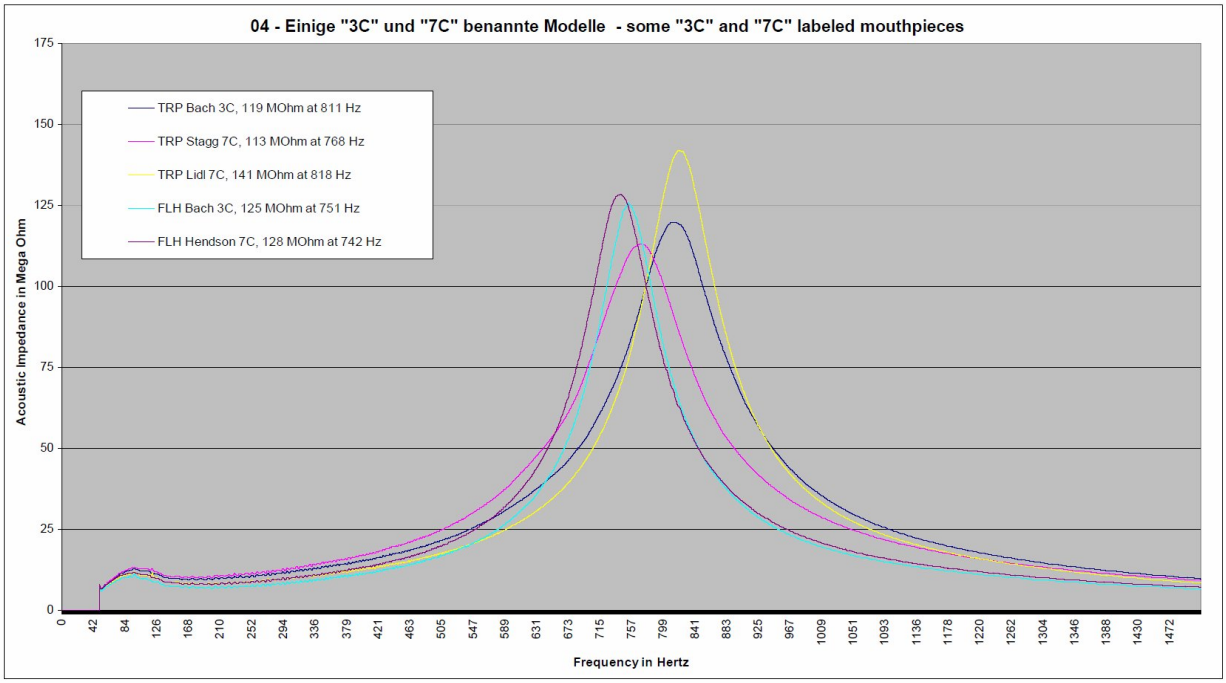
Das Mundstück wirkt sich daher sehr stark auf Stimmung, Ansprache und Klang des Gesamtinstruments aus. Würde eine Posaune mit einem Trp. Mundstück gespielt, klingt sie nach Trompete, wird eine Trp. mit einem Waldhornmundstück angespielt, klingt sie nach „Horn" (abgesehen von Stimmungsmängeln, etc.) Wie bei konischen Teilen und Hörnern ändert sich die akustisch wirksame Länge mit der Frequenz!

Große Volumen (kurze aber massive Enlargements als Trichter bzw. Kessel) am Beginn des Instruments ohne folgende Einengung haben den akustischen Nachteil, daß sie die Input Peak Magnituden im höheren Frequenzbereich stark reduzieren. Einengungen nach so einem zusätzlichen Volumen können Magnituden dagegen wiederum anheben. (Siehe Teil 2 Frustum closed-open mit einem Trichter oder zyl. Verlängerung samt Einengung am Beginn).

In vielen Quellen wird darauf verwiesen, daß ein mit dem Instrument geliefertes Mundstück die besten akustischen Eigenschaften haben würde, und möglichst ein akustisch gleichwertiges anderes Mundstück verwendet werden soll um die beste Stimmung und Ansprache zu erreichen, was somit impliziert, daß das jeweilige Instrument dann eine gute Stimmung und Ansprache hätte. Bei den meisten Instrumenten kann ich diese Einschätzung aber nicht teilen. Auch die Meinung von Dr. Wogram, daß nur mit „großen" Kesseln eine gute Stimmung erreicht wird kann ich (bei Trompeten) bisher nicht nachvollziehen.

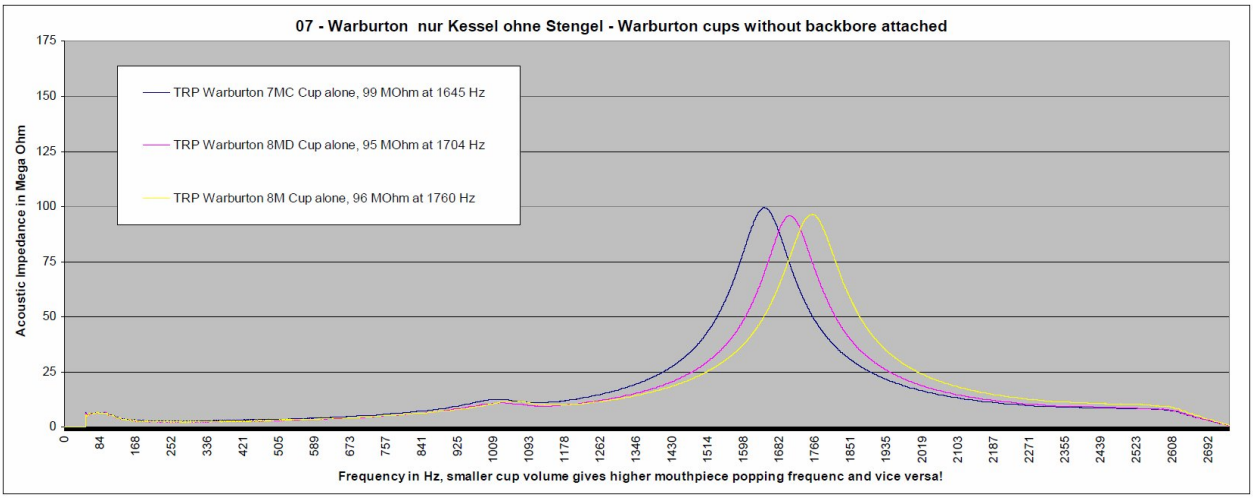
Speziell die Kesselgröße und Randform müssen individuell zum Bläser passen, sie sind die Schnittstelle.

Mundstück Modellbezeichnungen können irreführen:



Bei Trompeten wird oft ein Modell „7C“ beigepackt, was eine relativ niedrige 1. MPC Frequenz hat. Die meisten Instrumente sind aber nur mit seichteren Kesseln oder größeren Hinterbohrungen einigermaßen stimmend zu bekommen.

Darüberhinaus habe ich mindestens 4 Stk. „7C“ Mundstücke im Fundus, welche alle unterschiedliche Resonanzfrequenzen liefern – folglich weichen deren inneren Abmessungen sehr stark ab! Die meisten sind grobe „Kopien“ eines Vincent Bach Modell 7C und manche (siehe oben) sind aber komplett unterschiedlich.

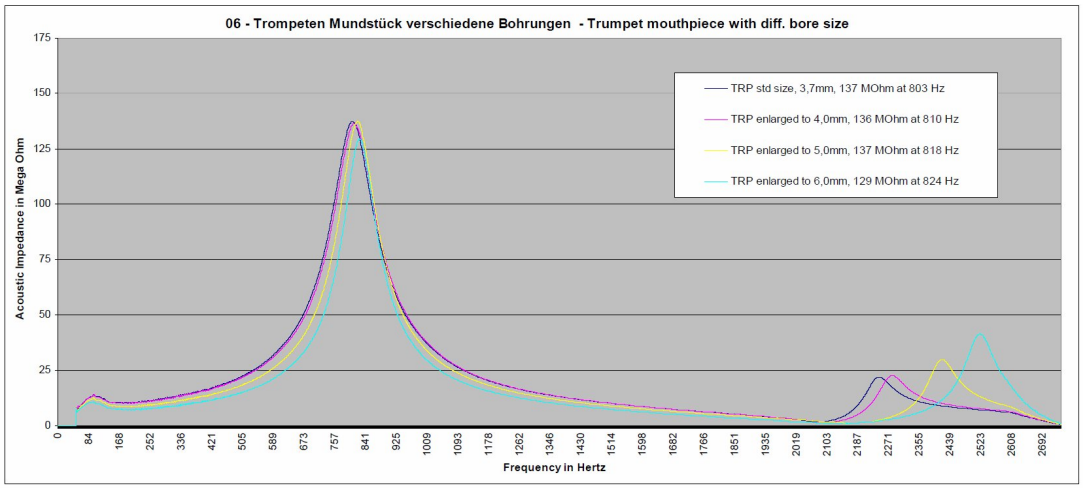


Kessel 8M hat hier das kleinste Volumen, 7MC das größte Volumen, die Bohrungen der Seelen sind gleich. Das Kesselvolumen und nur ein ~ ½ Teil der Seelenlänge ergeben eine hohe Helmholtz-Resonanz-Freq.

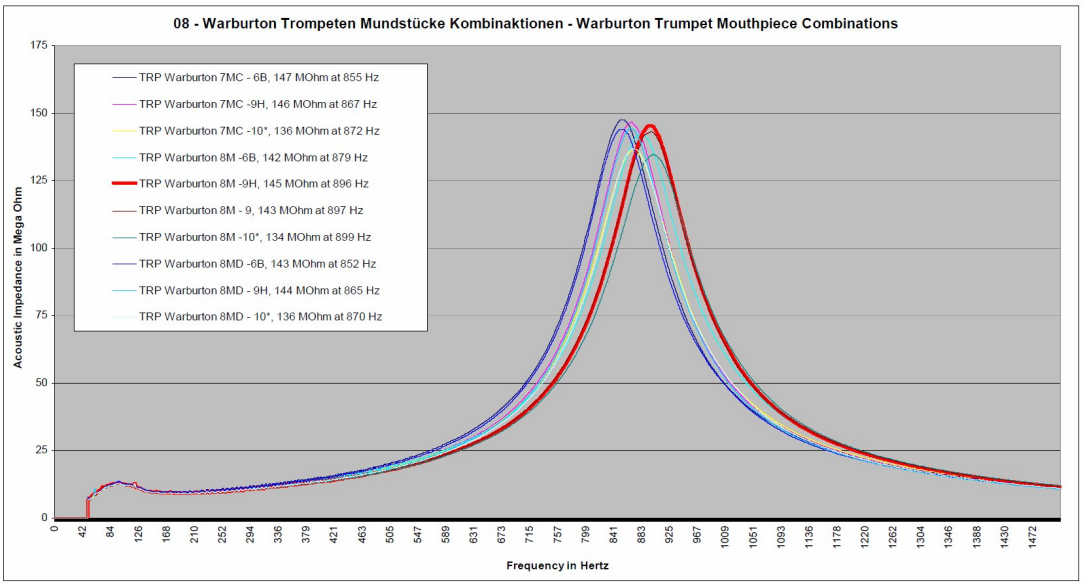
Mit vollständiger Länge der Seele + Backbore wir die Resonanzfrequenz beinahe um die Hälfte niedriger!

Bei Trp. Mundstücken hat sich eine Länge von 86-89mm als Standard etabliert, dadurch können diese auch einfach untereinander verglichen werden. Bei den kürzeren Kornett und Flügelhornmundstücken muß daher bei einem Vergleich mit Trp. Mundstücken ein Teil des Kornettmundrohres zusätzlich berücksichtigt werden!

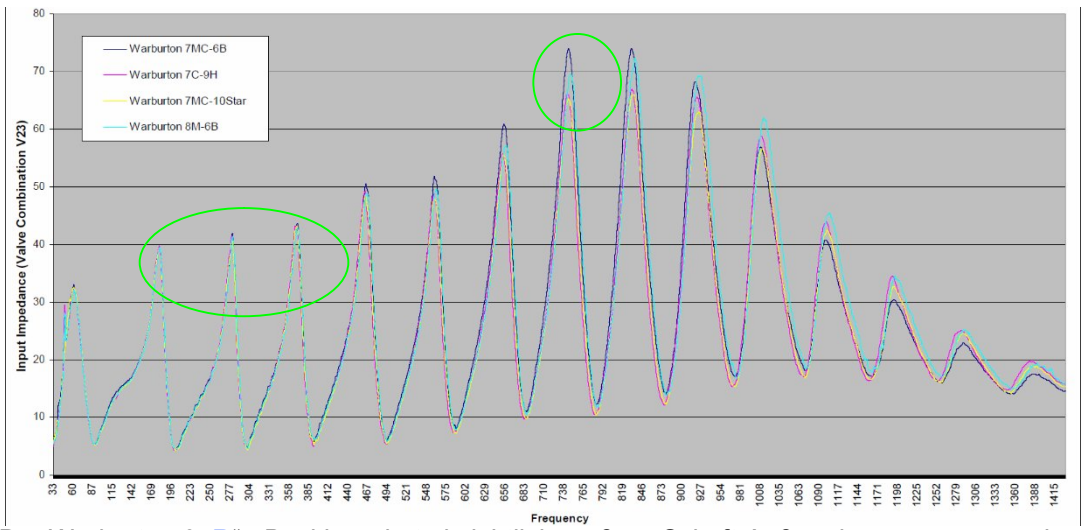
Die Auswirkungen unterschiedlicher Volumenverhältnisse auf die Intonation sind in folgender Reihung
1. Kessel 2. Backbore 3. Durchmesser/Länge Seele. 4. Länge Backbore



Mit einer “Std.“ Seele und Hinterbohrung liegt die 1. Resonanz Frequ. zwischen ~750-900 Hz.
Effekt, wenn der Durchmesser der Seele bei einem Mundstück durch Aufbohren vergrößert wird:
Die „Funktion“ des Mundstückes als Komponente nimmt ab einer Grenzschwelle (gelb) rasch ab!



Umso kleiner hier die Modell # des Backbores, umso enger ist dieser (weniger Vol.) -> tiefere Popp.Freq.



Der Warburton 6 „**B**“ - Backbore hat absichtlich größere Schaft-Außenabmessungen, verkürzt so die Eintauchtiefe in den Receiver und verlängert dadurch einen „Gap“ **absichtlich** um ~2,54 mm (0,1 Inch).

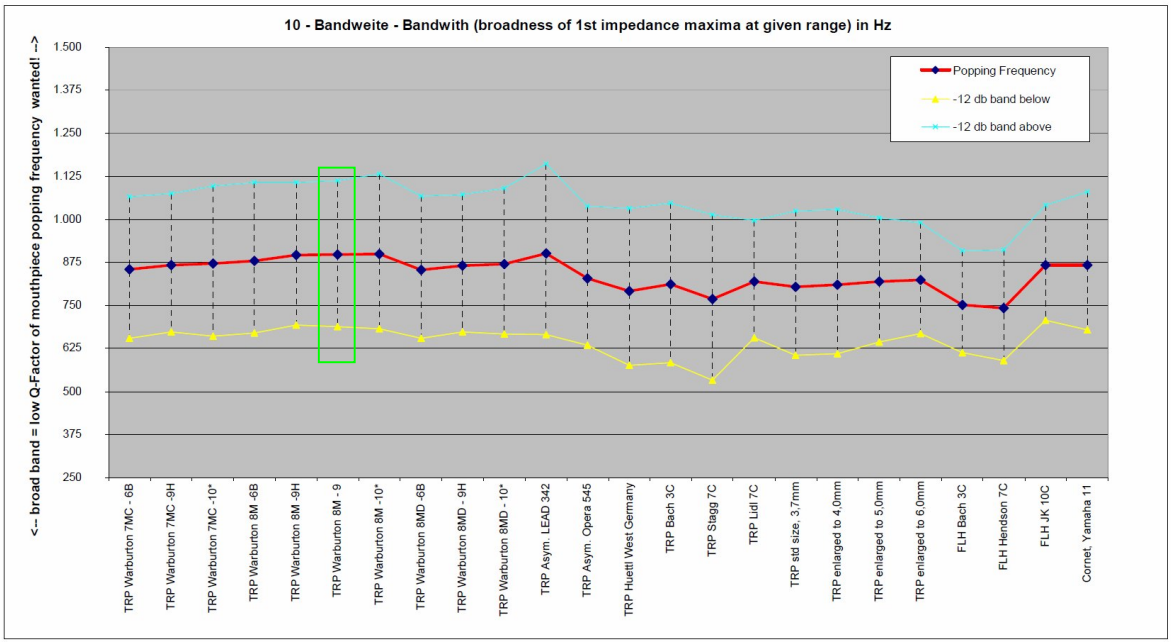
Nr. 6 ist in dieser Auswahl der engste Backbore, hat einen „commercial / schrillen / durchdringenden“ Klang. Backbore 9 & 10 sind „Symphonic“ - „weite Größen“, auch mit wesentlich weniger gefühltem Widerstand.

Die Messungen sind im Jahr 2004 an einer Bach Stradivarius Bb Trompete mit LR25 Leadpipe und 37 Bell mit der Ventilstellung V2+V3 von mir durchgeführt worden. Die grün eingekreisten Peaks sind die einzigen, die mit dieser Griffkombination als Standardgriff Verwendung finden: notiertes kl. Ab, Eb1, Ab1, Ab2.

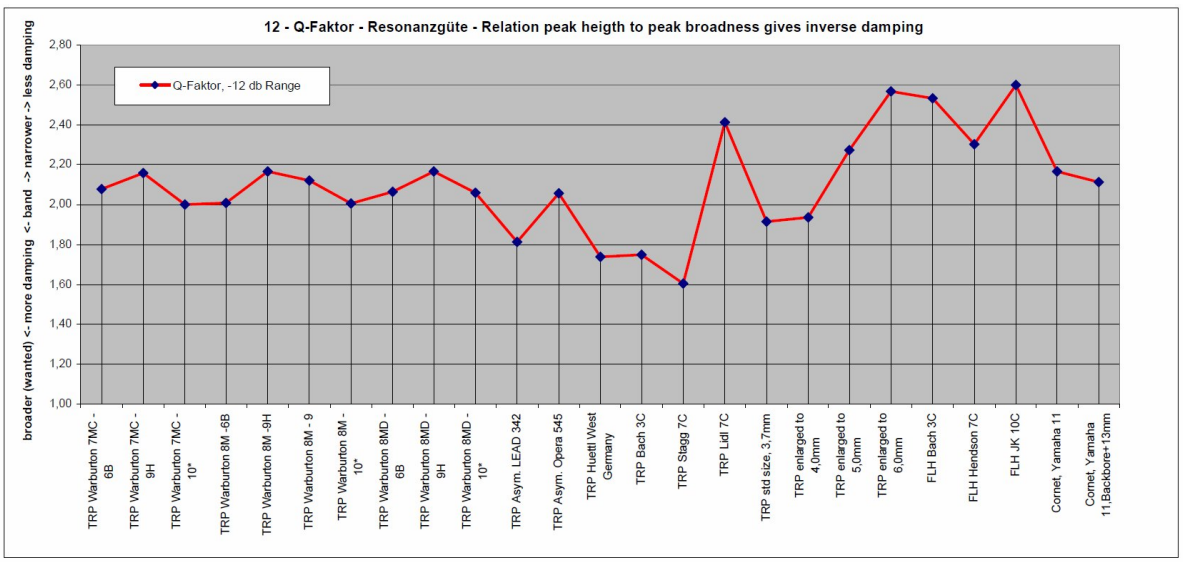
Die tieferen Moden zeigen kaum Differenzen. Allerdings sollte beim Betrachten der restlichen höheren Peaks bewusst werden, daß auch die tieferen Moden bereits unterschiedlich „klingen“, da die höheren harmonischen Vielfachen (Obertöne) unterschiedlich stark bedämpft und reflektiert/abgestrahlt werden.

->Das notierte Ab2 ist mit Standardgriffen der höchste Ton, der mit größter Rohrlänge erzielt werden muß!

Beim notierten Ab2 – welches ein Ton ist, der auf vielen Bb-Trompeten gefühlt „schlechter anspricht“ zeigen sich sehr große Unterschiede, diese sind hier vor allem durch den größeren Gap teils begünstigt. Allerdings sprechen durch diesen Gap höhere Resonanzfrequenzen anderer Ventilstellungen wiederum schlechter an.



1. Resonanzfrequenz = „Popping“ Frequenz und Bandbreite verschiedener Trp., Kornett & Flh Mundstücke



Kürzere Flügelhorn- und Kornett Mundstücke spez. mit tieferem Kessel haben einen höheren Q-Faktor, ebenso steigt der Q-Faktor durch Aufbohren der Seele = der Einfluß des Mundstückes nimmt ab.

Mundstück Gewichte, „Booster“ und Masse generell:

Man möchte als Bläser die Luftsäule im Instrument zum Schwingen anregen, jedoch nicht primär das Instrument / die Instrumentenwandung selbst. Das Mitschwingen des Metalls selbst betrachtet man als **parasitäre** Schwingungen, die nur Energie verschwenden (Reibung/Erwärmung). Die einzelnen Komponententeile und vor allem auch der Schallbecher vibrieren anhand ihrer unterschiedlichen Massen / Dämpfungen mit, allerdings nicht mit den gleichen Frequenzen und Amplituden wie die Tonsäule selbst.

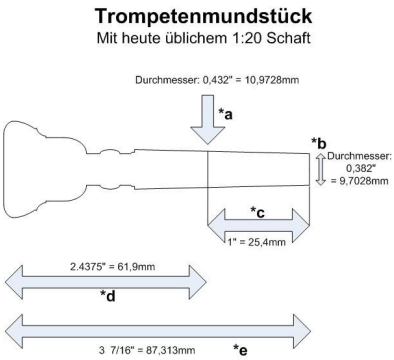
Durch Änderungen der Masse am Mundstück, aber auch z.B. am Ventilstock und durch Stützen, etc., sowie durch gezieltes „Anfassen“, vor allem eines leichtgewichtigen Schallbechers kann ein ungewolltes Mitschwingen gezielt gedämpft, bzw. auf andere Frequenzen verlagert werden.

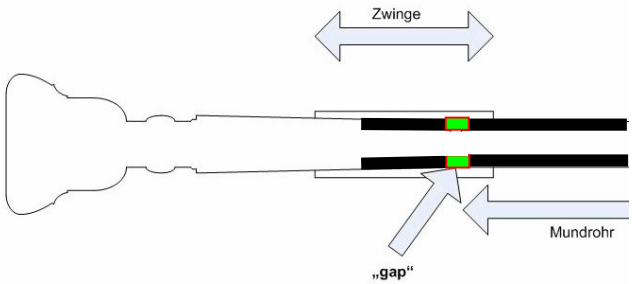
Prinzipiell haben am geschlossenen Instrumentenende (Mundstück) **ALLE** Resonanzfrequenzen ihren 1. und den **stärksten** Druckbauch. Dadurch wirkt eine Masseänderung an dieser Stelle nicht automatisch selektiv auf **einzelne** höhere und somit fragile Resonanzen*. Manche Instrumente (& Bläser) profitieren daher in Summe von einem geringfügig geänderten Gewicht einzelner Bauteile, andere wiederum nicht! Die äußere Geometrie und Formgebung von Mundstücken ist reine Zierde und hat keine akustischen Auswirkungen, abgesehen von Masse und den Kontaktflächen / Rundungen zu den Lippen des Bläsers.

Vermutlich ist das auch der Grund, warum die Evolution der Blechblasinstrumente „bereits sehr **viel Masse“ am Mundstück hervorgebracht hat!*

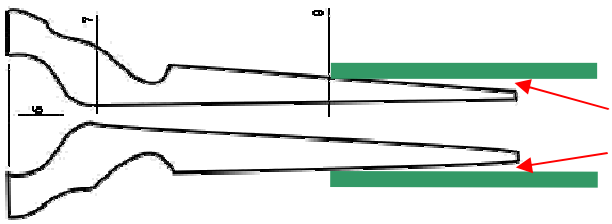
Mundstück-Receiver & „Gap“:

Dieser soll 1. eine luftdichte Verbindung mit dem Mundrohr sicherstellen. Üblicherweise sind die Receiver konisch angepasst, es haben sich einige Standards etabliert, bei Trompeten ist es ein Morse-Konus mit ~ Taper 1:20. Bei einem Enddurchmesser von rund 9,7mm Mundstückaussenseite ist die Eintauchtiefe bei rund 2,54cm/1 Zoll. Der Receiver muß aber minimal länger ausgeführt sein, sofern ein konische Mundrohr anschließt und nicht „anstößt“ / das Mundstück locker =undicht sitzen würde. Ein daraus entstehender Spalt „Mouthpiece Gap“ = Enlargement“ hat akustische Auswirkungen, auf die auch in Teil 3 eingegangen wird.



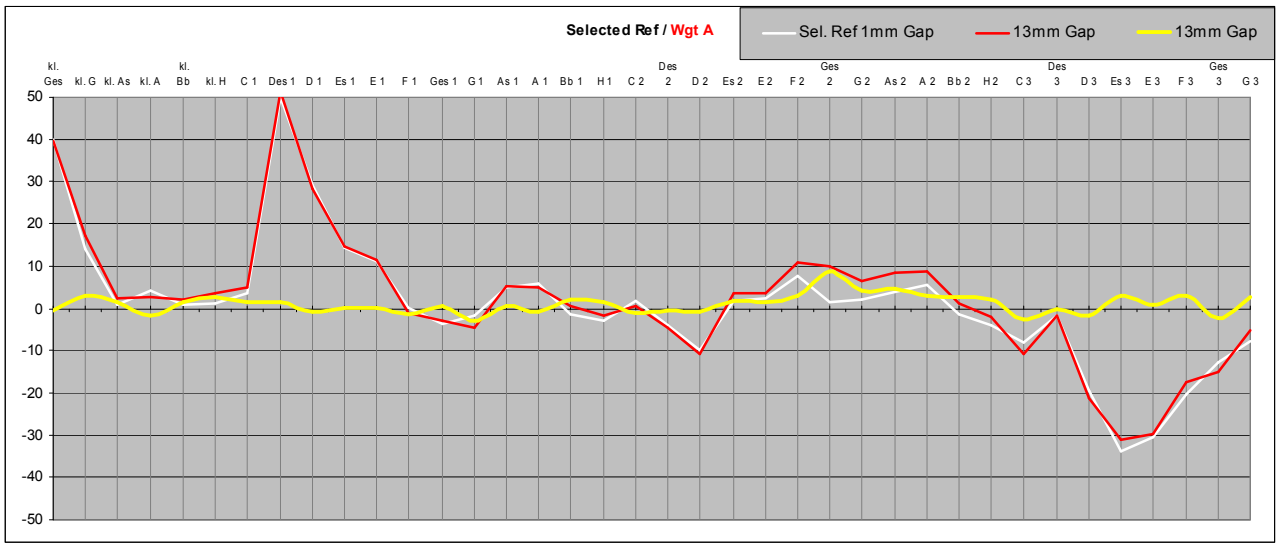


Gap = grün eingezeichnete Durchmesser-Erweiterung
Schwarz soll die Materialstärke (am Übergang) zeigen



6 = Kessel 7 = Seele 8 = Backbore Rot = hier eine unpassende Mundrohrzwinge

„Negativer“ Mouthpiece-Gap = am äußeren Schaft des Mundstückes in der Zwinge, oftmals an älteren Drehventil Instrumenten mit zyl. Mundrohren, deutscher, tschechischer und österreichischer Herkunft. Dieser hat aus Erfahrungen negative Gesamteffekte (Stimmung / Ansprache) und sollte vermieden werden.



Aus einer „alten" Messung eine Drehventil Trompete, Auswirkung „Gap +12mm" auf Stimmung. Gewichtung mf, die Änderungen in der Ansprache (hier schlechter für C3, D3) sind nicht gezeigt.
Gelb = Differenz in Cent.

Helmholtz, Eq CC Längen:

Ein konventionelles Mundstück als Helmholtz Resonator besteht aus einem Hohlraum (Kessel) und einer kurzen, offenen Verengung (Seele). Im Fall der Trompetenmundstücke ist die Verengung mit anschließendem Backbore etwas lang, aber die Analogie mit dem Helmholtz Resonator ist auch nur für die 1. Helmholtz Resonanz anwendbar.

Vergrößerung des **Hohlraum Volumens**:	1. Resonanzfrequenz	MPC fällt
Vergrößerung der **Engstellen-Fläche** (oder Verkürzung):	1. Resonanzfrequenz	MPC steigt

An seiner Öffnung wird der Resonator letztendlich dann durch eine Luftsäule (Instrument) verlängert.

Eq. CC Länge Mundstück, tiefer Frequenz-Bereich:

Ein zum Resonator äquivalenter geschlossener Zylinder hat eine Querschnittfläche gleich der Querschnittfläche der anschließenden Luftsäule. Sind die Wellenlängen der Moden (= bei niedrigen Frequenzen) viel länger als die Dimensionen des Resonators, dann ist hier alleine das Volumen wichtig, nicht seine exakte geometrische Form.

Ein equivalenter Zylinder hat bei tiefen Frequenzen eine Querschnittfläche * Länge = **Volumen**, daß dem Gesamtvolumen des Resonators entspricht. Somit ergibt sich die equivalente Länge des Zylinders aus

Länge Equ. Zyl. at very low Freq. = Total **Volumen** Resonator / Querschnitts-**Fläche** Zyl.

-> Dies ist auch die kürzest mögliche äquivalente Länge eines cl. Zylinders bei tiefen Frequenzen.

Eq. CC Länge Mundstück, bei Popping-Frequenz:

Die 1. Resonanzfrequenz eines Helmholtz Resonators ist vorab nicht von der bei einem geschlossenen Rohr unterscheidbar, die Zylinderlänge des 1. Resonanzfrequenz entspricht einer ¼ **WL**.

Die Länge eines equivalenten geschlossenen Zylinders, der beim 1. Mode die selbe Resonanzfrequenz wie der Helmholtz Resonator aufweist ergibt sich daher aus

Eq. Länge cl. Cyl. bei MPC Popp Freq. = Speed c / (4 * MPC Popp. Freq.)

Ermitteln einer Eq. CC Länge Mundstück, Beispiel inkl. Leadpipe:

© Baldwin Wallace University, Dept. of Physics, Berea, OH 44017, U.S.A.

Versuche mit Leadpipe und zyl. Rohr TL = 1335mm
+ Zyl. selber Durchmesser wie Enddurchmesser des MPC anstelle MPC mit einem „Stopfen“ und Mikrophon wurde vermessen, der Stopfen jeweils 1cm weiter herausgezogen, insgesamt 15cm = variable Länge.
Der Lautsprecher mit Chirp Signal ist hier am offenen Ende. (Endkorrektur)
FFT, dann für jeden Peak 1-12 jeweils die eff. Länge berechnet und eine Kurve erstellt (Leadpipe involviert!)

Mpc + Leadpipe und Zyl. Rohr Resonanzen werden gemessen und die akustisch wirksame Länge errechnet, anschließend von obigen Leadpipe/Zyl. Längen abgezogen gibt die +/- equiv. Länge über Freq.

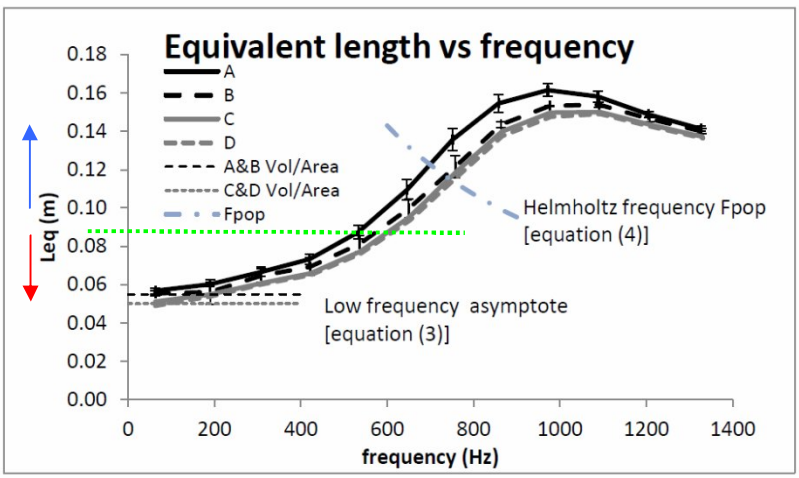


Figure 1 – Equivalent lengths *Leq* of two pairs of trumpet mouthpieces

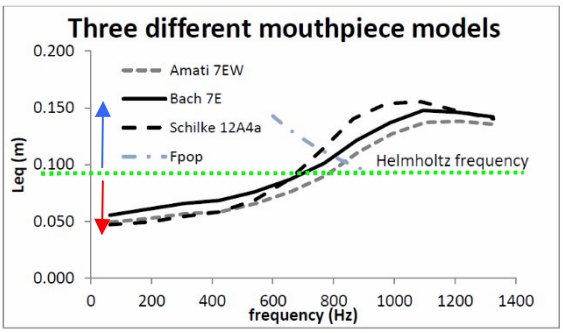
© Baldwin Wallace University, Dept. of Physics, Berea, OH 44017, U.S.A., at ISMRA 2016 Bueonos Aires

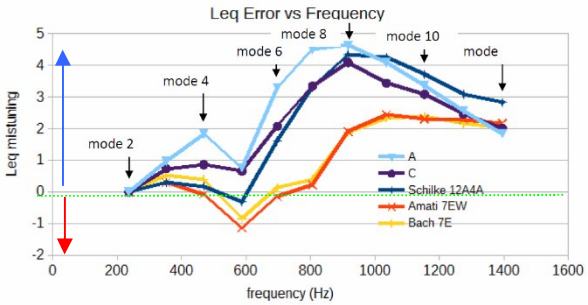
Blau = akustisch länger / tiefer Rot: akustisch kürzer / höher als physisch = 8,8cm (grün)

MPC A = 680 Hz Popp. Freq. MPC B = 710 Hz Popp. Freq.
MPC C = 730 Hz Popp. Freq. MPC D = 730 Hz Popp. Freq.

Im tiefen Frequenzbereich liegen alle Mundstücke nahe beieinander, anhand V / A ~5,5cm
MPC C und D haben ein kleineres Kesselvolumen. V / A ist hier daher kleiner / kürzer / höher
MPC A hat eine größere EL oberhalb der Popp. Freq. = tiefer gegenüber kleineren Modes bei MPC B
(die Mundstücke in diesem Beispiel haben alle sehr große Kessel und eine niedrige Popping Frequenz)

Vergleich einiger Mundstücke mit kleinerem Kesselvolumen:





© Baldwin Wallace University, Dept. of Physics, Berea, OH 44017, U.S.A., at ISMRA 2016 Bueonos Aires

Amati 7EW MPC Popp. Freq. = 820 Hz
Bach 7E MPC Popp. Freq. = 790 Hz
Schilke 12A4a MPC Popp. Freq. = 745 Hz
blau = länger tiefer rot = kürzer / höher

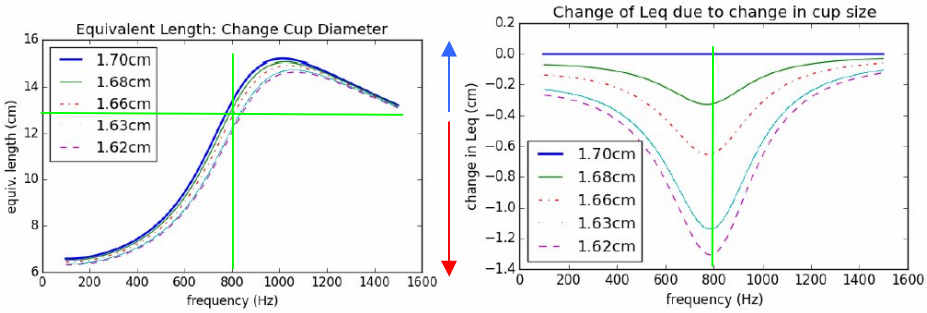
Eine kompl. Trompete, Wgt 0 = ~ pianissimo
Abw. EQL in cm
Modell A,C und Schilke scheinen suboptimal,
hier wurde Mode 2 als Referenzpunkt gewählt.

Das Bach Mundstück liegt bei tiefen Frequenzen tiefer/länger, was vermuten lässt, daß ein höheres Gesamtvolumen vorliegt. Die Overall EQL Kurve ist aber sehr ident. Das Schilke Mundstück hat offensichtlich das selbe Gesamtvolumen wie Amati, die EQ-L Kurve ist aber steiler, Peaks ab der MPC Popp. Frequ. liegen tiefer / länger.

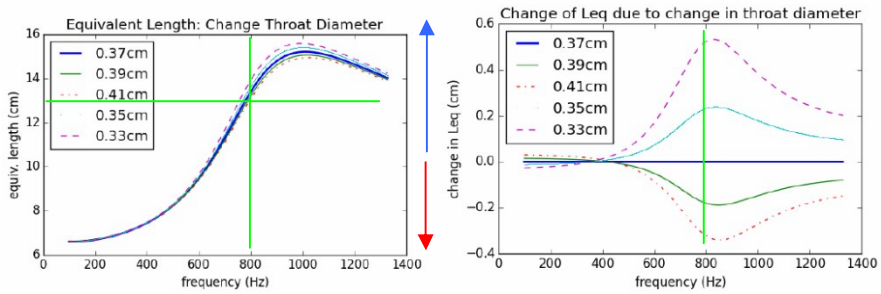
Man sieht, daß bei typischen Trompetenmundstücken die akustische Länge bei der MPC Popp. Frequenz immer länger/tiefer als deren physischen Abmessungen sind (1,5-2cm). Die akustisch wirksame Längenänderung mit der Frequenz beträgt rund 10cm!

Simulierte Änderung der Eq. CC Länge Mundstück, Kesseldurchmesser / Seele:

© Baldwin Wallace University, Dept. of Physics, Berea, OH 44017, U.S.A., at ISMRA 2016 Bueonos Aires



Simulation Kesseldurchmesser =Volumen verkleinern (auch kleines Gesamtvolumen) -> V/A



Simulation Seele Durchmesser + / - verändern (kaum geändertes Gesamtvolumen) -> V/A ~

Änderungen der Konturen, Backbore Profile + Volumen, Länge wurden bei diesen Vergleichen nicht berücksichtigt. Speziell Änderungen durch das Backbore fehlen in dieser Zusammenstellung.

MPC Equiv. Länge, Berechnung lt. Cardwell Patent 1970:

Abstecher zum Gesamtinstrument „Resonator“:

Cardwell geht auf die Fragen ein, daß ein Blechblasinstrument mit Mundstück einerseits geschlossen ist, andererseits aber das Muster der Resonanzen eines beidseitig offenen Zyl. liefert und führt die bekannten Formeln für geschlossene (odd Modes) und offenen Zyl (odd und even Modes) an.

Er kommt zum Ergebnis, daß sich mathematisch die effektive Länge als Variable verhalten muß.

Akustisch notw. wirksame Änderung **l**= L open pipe* (1/(2*n)) -> **Faktor eff. L. Closed Zyl= [(2n)-1] / (2n)**

Anhand der Formel müsste ein Resonator z.B. für Mode 2 so agieren, daß dessen effektive Länge nur 75% der physischen ausmacht, bei Mode 8 aber 94%, damit die resultierenden Resonanzen die Verhältnisse 1:2:3:4:5...usw. der Schwingungen zueinander des offenen Zylinders aufweisen.

Beim geschlossenen Zylinder ist das eine Variation von 19% Frequenz/Länge (94-75)% von Mode #2 zu #8; aus Sicht der kürzesten akustische wirksamen Länge ist es eine 25% Variation bei Mode 2, 6% bei Mode 8. Siehe auch Ergebnisse meiner Vergleiche closed Zylinder / Frustum.

„Flaring Horns“:

Ein röhrenartigen Resonator, der sich aufweitet (Horn) wirkt in diese Richtung. Die Aufweitung verursacht Änderungen der Phasengeschwindigkeit der stehenden Wellen im Resonator, sodaß diese sehr deutlich von der „normalen“ Schallgeschwindigkeit abweichen. Dies führt zu einem Effekt, als würde sich die physische Länge des Resonators ändern, was nicht der Fall ist, es ändern sich „Geschwindigkeiten mit der Frequenz“.

„Flaring Horns“ haben eine akustisch wirksame Länge, die bei tiefen Frequenzen kürzer als ihre physische Länge ist, die akustisch wirksame Länge steigert / nähert sich asymptotisch der physischen Länge an, je höher die Frequenzen sind. Dadurch haben Hörner schlussendlich schon eine notwendige Eigenschaft für Blasinstrumente, nämlich eine abnehmende akustische Länge mit tieferer Frequenz. Allerdings reichen diese Eigenschaften alleine nicht aus, das Mundstück ist ein Teil der geänderten akustischen Längen, dies vor allem bei höheren Moden:

„Mundstück – Äquivalente CC Länge = MPC EL “:

By equating the acoustic wave impedance in a tube to the acoustic impedance of a terminating Helmholtz resonator, the present inventor has derived an equation for the apparent lengthening effect, Δx, of a terminating Helmholtz resonator. It is:

$$\operatorname{ctn}\left(\frac{2\pi\Delta x}{\lambda}\right)=S(b/AV)^{1/2}\left(\frac{f_r}{f}-\frac{f}{f_r}\right) \qquad (4)$$

where

Δx=the apparent lengthening (e.g. in cm.)
λ=the wavelength (in cm.)
S=the cross-sectional area of the tube (in cm.^{2})
b=the effective length of the orifice of the resonator (in cm.)
A=the effective cross-sectional area of the orifice (in cm.^{2})
V=the volume of the resonator cavity (in cm.^{3})
f=frequency (in Hz.)
f_r=the resonant frequency of the resonator

Ergebnis Mundstücke: Bei sehr tiefen Frequenzen selbe Länge eines Zylinders mit Mainbore, zuzüglich der Mehrlänge eines Zylindes, der das gleiche Volumen wie das Mundstück hat (anstelle Mundstück) Darüber verlängert sich (leider) die akustische Länge auf ein Maximum kurz oberhalb der 1. Popp. Frequ, um ca. 1000 Hz (D, Eb, E3 sind auf Bb-Instrumenten dadurch immer zu tief) und fällt erst danach wieder ab.

Es ist aber sehr schwierig zu bestimmen, wo der Kessel (Cavity) endet und wo die Seele (Orifice) beginnt bzw. damit deren Längen. Die obige Formel soll lt. Cardwell daher nur die Zusammenhänge zeigen.

Tatsächliche equiv. Längen sollten lt. Cardwell daher experimentell gewonnen werden:

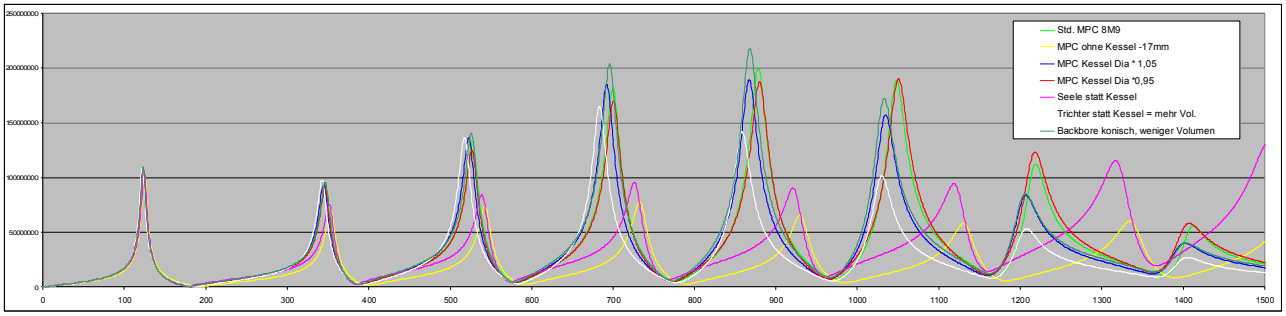
Mundstück + (sehr) langes zyl. Rohr für möglichst viele resultierende Resonanzen = Stützstellen, mit dem gleichen Durchmesser wie Mainbore;

Anhand gemessener Frequenzen Equiv. L closed Cylinder (f)= Speed * (2n -1) / (4 * Resonanzfreq.)
\- Physische Länge +Endkorr.
= Equivalente Längenänderung mit Frequenz.

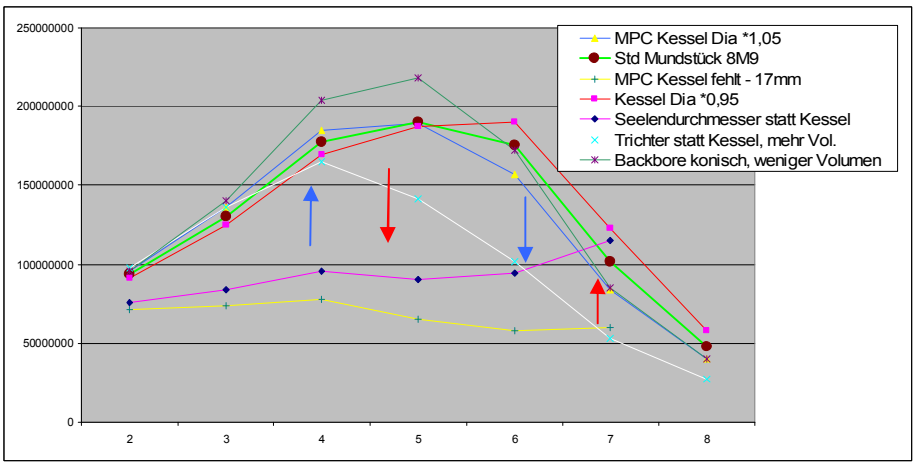
Das Patent selbst beschreibt die Konstruktion eine hoch F Trompete, wo der Mundstück Längeneffekt noch signifikanter als bei längeren, tieferen Blasinstrumenten ausfällt. Auf geänderte equiv. Längen in Summe durch Änderung der Verhältnisse von zyl. Rohranteilen (durch Ventile) geht Hr. Cardwell leider nicht ein.

Trompeten Mundstücke – einige besondere interessante Simulationen:

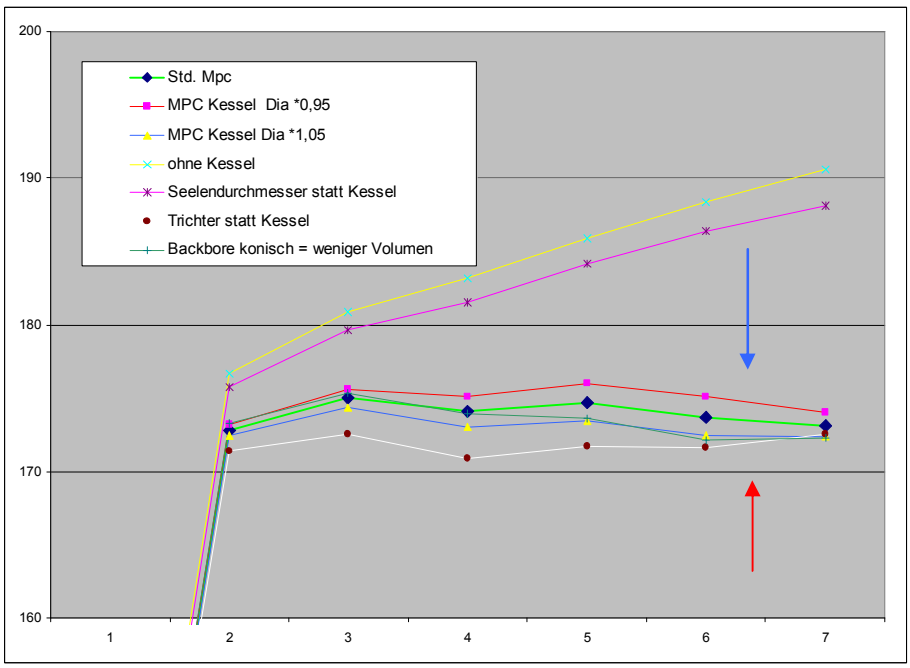
Folgende Simulationsversuche wurden anhand einer simulierten hoch F Trompete mit 1 Segment Katenoid Bell und dem ART-Mundrohr, sowie dem ART-Mundstück (Warburton 8M9) durchgeführt. Die 1. Mundstück Popping Frequenz liegt in der Simulation bei 853 Hz, etwas unterhalb Mode 5 der hoch F-Trompete.



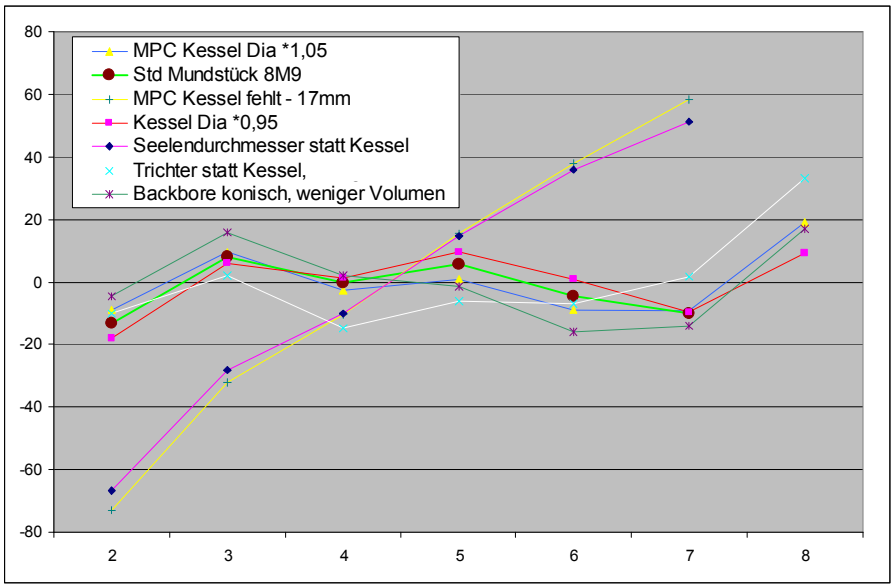
Hellgrün: Das nicht modifizierte Mundstück + ART Mundrohr, hoch F Trompete mit langem Bellskirt 54mm, und möglichst rascher Steigung des Skirts zu Beginn. (Siehe Teil 2-E)



Impedanzmagnituden der Resonanz Moden # 2-8, bei verschiedenen Änderungen



Äquivalente Fundamental Pitch – Frequenzen. Änderungen Mode 1 sind gering, nicht gezeigt.
Pfeile blau: Änderung mit Kessel / mehr Kesselvolumen, Pfeile rot: Änderung mit mehr Backbore-Volumen



Die jeweilige Abweichung zu gemittelten Frequenzen (EFP) von Mode2-8,
zeigt die Änderung der Inharmonitität der Modes zueinander. Die Änderungen einer gemeinsamen Grundstimmung können aus dem EFP abgelesen werden.

Folgende Änderungen wurden versuchsweise vorgenommen und die Kommentare zu der Ergebnissen:

Standard Mundstück 8M9:
Startdurchmesser Innen: 15,95mm -> Hinweis: In der Simulation werden immer die ersten 2mm weggelassen, das soll den Teil der Lippenmasse im Mundstück mit berücksichtigen.

MPC Kessel fehlt -17mm:
Es wurde der ganze Kessel weggelassen, das Instrument beginnt mit der „Seele“, 3,7mm Durchmesser

1. Das Katenoidhorn (Schallbecher) hebt tiefere Frequenzen an (Mode 1 zu wenig, das wissen wir), +
2. Das Mundrohr und das Mundstück Backbore heben nun zusätzlich die höheren Moden wiederum an!

Es gibt keinen oberen Wendepunkt bei der equivaläntен Länge, die nun mit zunehmener Frequenz linear immer kürzer wird. Das Instrument ist am kleinen Beginn nun „zugespitzt“ und am großen Ende erweitert.

Ohne Kesselvolumen gibt es keine Anhebung der Magnituden!

Seelendurchmesser anstelle Kessel:
Selbe Länge wie Kessel L 17mm mit 3,7mm Diameter Start, dann Seele.
Der Kessel ist hier durch die „Stroh-Halm“ Seelen-Verlängerung ersetzt. Duch die Verlängerung sind die Frequenzen tiefer. Höhere vergleichsweise mehr. Die Magnituden steigen für hohe Frequenzen etwas an, die Resonanzfrequenzen fallen aber, was den Eindruck vermittelt, daß diese durch das „dünne Rohr“ wesentlich stärkere penetrieren können, als tiefe Frequenzen.

Der Helmholtz Resonator fehlt, daher auch die Helmholtz-Resonanz. Beim Gesamtinstrument ohne Kessel = ohne Kesselvolumen sind die Oktaven extrem gestreckt! Folgt man diesem Ansatz, so braucht man nur das notwendige Kessenvolumen schrittweise zuzugeben, bis ein gewünschtes Gleichgewicht zu Backbore, Mundrohr und Instrument hergestellt ist.

Längere Seele:
Wird die Seele beidseits verlängert hat das nur sehr geringe Auswirkungen. Nicht in der Grafik, weil zu kleine Unterschiede. Würde die Seele nur einseitig verlängert, gibt das ein geringeres Volumen auf dieser Seite. Effekte siehe Änderung Kesseldiameter was gleichbedeutend mit Volumenänderung ist.

Durchmesser der Seele:
Dies wurde in einem vorigen Kapitel gezeigt, ein Aufbohren – was in etwa mit weglassen sein sollte, erhöht die MPC Popp. Freq., aber ab einem gewissen Punkt fällt die Funktion des „Resonators“ stark ab.
Tiefere Instrumente brauchen eine größere Bohrung der Seele, was mit einem größeren Kesselvolumen einhergeht. (Siehe dazu den Versuch mit Trichter statt Kessel, hier wurde auch die Seele etwas gekürzt).

Kessel Diameter * 0,95:
Der Durchmesser wurde um 5 % verkleinert, allerdings nur oberhalb Original Durchmesser 5mm, daß verhindert eine „Verlängerung und Reduktion“ der Seele, das Kesselvolumen ist höher.

Mundstück Popp. Freqz. steigt. Kleinere Kesselvolumen heben die Grundstimmung an.
Tiefere Moden werden wenig höher, höhere Moden werden höher, aber die max. EL Mouthpiece bleibt,
Die Inharmonizität leidet aufgrund der höheren Grundstimmung und der limitierenden max. EL
Magnituden unterhalb MPC Popp Fr.: werden vermindert, oberhalb aber wesentlich stärker erhöht!

Kessel Diameter * 1,05:
Der Durchmesser wurde um 5 % vergrößert, allerdings nur oberhalb Original Durchmesser 5mm, daß verhindert eine „Verkürzung“ der Seele, das Kesselvolumen ist höher.

Mundstück Popp. Freqz. fällt. Größere Kesselvolumen senken die Grundstimmung ab.
Tiefere Moden werden kaum höher, höhere Moden werden tiefer.
Magnituden unterhalb MPC Popp Fr.: werden erhöht, oberhalb aber wesentlich stärker vermindert!

Trichter statt Kessel – größeres Volumen vor der Seele:
Selber Startdurchmesser wie Kessel 15,95mm dann konisch verjüngend bis kleinster Durchmesser bei Seele anstelle des Kessels. Das gibt eine leichte Volumenreduktion am Start, aber ein wesentlich höheres Volumen vor dem Beginn der Seele = wesentlich höheres Volumen vor der Seele als mit Kessel.

Mundstück Popp. Frequ. fällt. stark, größere Kesselvolumen senken die Grundstimmung stark ab.
Selbes Ergebnis wie Diameter * Faktor Vergrößerung, Der Unterschied ist nicht primär auf die geänderte Form zurückzuführen, sondern auf das wesentlich höhere Volumen bei gleichbleibender Seele+Backbore.

Backbore konisch = kleineres Backbore-Volumen:
Das #9 Backbore hat eine „bauchige“ Gestalt, der Durchmesser erweitert sich zu Beginn stärker als ein Konus. Der Enddurchmesser und Backborelänge wurden gleichgehalten, konisch = weniger Volumen.

Kleinere Backbore Volumen erzeugen mehr MPC-Equiv. Längenänderung oberhalb der Popp. Frequ., EFP fällt mit zunehmender Frequenz ab, wirken bei tiefen Modes aber kürzer (im Vergl. zu mehr Kesselvolumen).

Magnituden von tieferen Moden werden erhöht, Magnituden von Moden oberhalb der MPC-Fr. vermindert.
-> im Umkehrschluß macht ein größeres Backbore tiefe Moden tiefer, hohe Moden höher.

Backbore – Länge:
Siehe Mundrohre / Leadpipes + Teil 2E.

Doppel-Resonatoren:
Siehe Teil 2E.

Mundrohre / Leadpipes / Leaderpipes:

Prinzipiell muß der Mundstück Stengel/Backbore als 1. Teil des Mundrohres und im Umkehrschluß das Mundrohr als Verlängerung des Mundstückes betrachtet werden. Daraus ergibt sich logischerweise, daß die Angaben des Mundstückes alleine keine vollständige Aussagekraft haben.

Mundrohre müssen den Durchmesserwechsel vom inneren Mundstück Diameter mit rund 8,8mm bei Trompeten auf die Bohrungsgröße der zyl. Rohrabschnitte (zwischen ~10,8 und 12,8 mm bei Trompeten und XL-Bore Kornetten) bewerkstelligen. Dies kann entweder sehr sprunghaft oder gesteppt (z.B. Zylinder), durch konische und zylindrisch folgende Abschnitte, oder auch in Form von anderen Geometrien erfolgen.

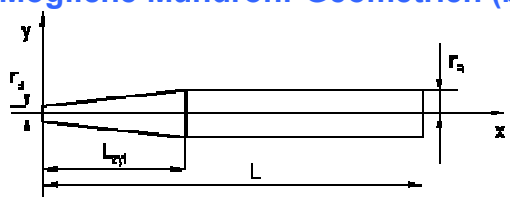
Generell: Ein bereits am Beginn sehr weites Mundrohr vertieft die unteren Resonanzen, ein engeres erhöht diese, allerdings gibt es Wechselwirkungen bei der Ansprache und Stimmung höherer Resonanzen, speziell ab der 8. Peak Freqenz (hohes C). Unterschiedliche Mundrohre beeinflussen daher neben Unterschieden in der Stimmung sehr stark die Spielbarkeit und Ansprache des Instruments im hohen Tonbereich!

Ein unpassendes Mundrohr kann ebenso wie ein unpassendes Mundstück ein Gesamtinstrument stark verschlechtern, und vs, es kann allerdings (wie jedes andere einzelne Bauteil auch) keine Wunder bewirken! Neben dem Mundstück ist es bei manchen Instrumenten ein relativ leicht zu tauschendes Teil, was das Herz des experimentierfreudigen „Trumpetiers“ höher schlägen lässt! --> Experimente dazu siehe Teil 2E!

„Reversed“ Leadpipes:

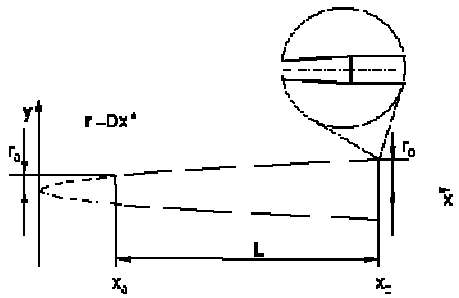
Hier sind die an das Mundrohr anschließenden Innen- u. Aussenzüge vertauscht angeordnet. Dadurch kann das Mundrohr länger gestaltet werden, bzw. der „Tuning Gap“ an eine spätere Position verschoben werden.

Mögliche Mundrohr Geometrien (beispielhaft):



konisch und / oder zylindrisch

Dennoch muß ein Mundrohr nicht zwingend konisch sein. Bei zahlreichen älteren Drehventil Trompeten und Flügelhörnern finden sich zylindrische (weite) Mundrohre, größtenteils auch ohne Mundstück-Receiver, sondern nur einer kurzen konischen Aufnahme / Anpassung am Beginn, damit das Mundstück „so hält“.

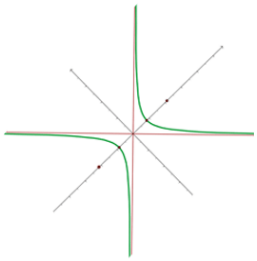


Bessel – Dual paraboloide, bauchige Form

Mundrohre dieser Bauart wirken auf die tiefen Resonanzen um so stärker vertiefend, je kleiner der Trichterexponent ist. (Der strichlierte Bereich ist nicht Teil des Mundrohres und die gezeigte dann fehlende Spitze liegt üblicherweise noch vor dem Mundstückbeginn).

Dieses mehr oder weniger bauchige Mundrohr ist das Gegenstück zu einem als Besselhorn mensurierten Schallstück. Beim Übergang zum zylindrischen Rohr tritt ein je nach Rohrlänge mehr oder wenig ausgeprägter Knick (wie beim konischen Frustum) und damit eine (unerwünschte) Reflexionsstelle auf.

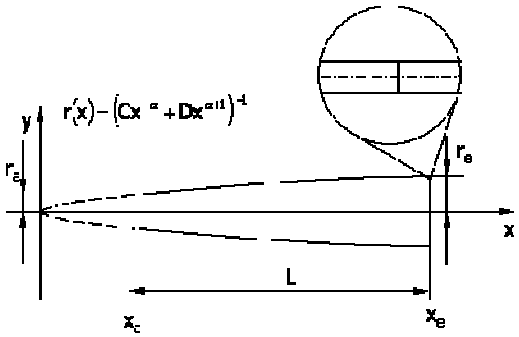
Das Dual eines „flaring“ Horns:



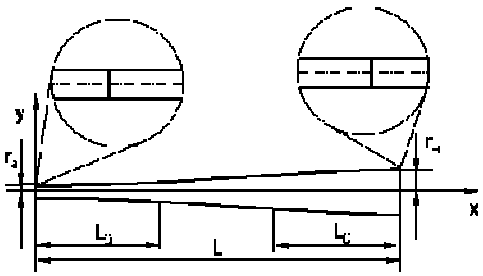
Robert. W. Pyle hat dieses Prinzip beschrieben:
The dual of the conical horn closed to its vertex (=Konus mit geschlossener, vorhandener Spitze) is generated by revolving =rotating a rectangular hyperbola about its asymptote.

The concept of duality often encountered in electrical network theory may be extended to acoustic horn theory. For “plane” waves in two horns whose crosssectional areas vary as $S_1(x)$ and $S_2(x)$, one can show that if the product = $S1(x) * S_2(x)$=constant value, then these horns are acoustic duals. That is, ***the axial distribution of pressure in one horn is the same as the distribution of volume velocity in the other.***

As a result, input, output, and transfer acoustic impedances of one horn have the same form as the corresponding acoustic admittances of the other. A solution of the Webster horn equation for the pressure and volume velocity corresponding to a given horn contour thus yields the solution for the reciprocal contour as well. Whereas the exponential horn and its limiting case, the uniform tube, are their own duals. ***Noch weitere Fragen dazu ?***

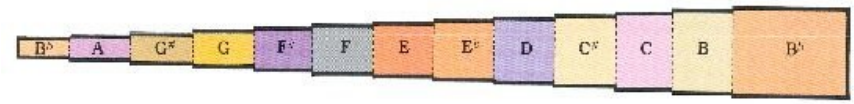


Modifiziertes Besselhorn – reflektionsfrei am Ende ..
Diese von Robert W. Pyle beschriebene Mundrohrgeometrie vermeidet den Knick am Übergang zum Mundrohr und soll an dieser Stelle keine unerwünschten Reflexionen hervorrufen....



konisch, nach Macaluso, an beiden Seiten glatte Übergänge

Gene Pilzcuk, Patent, „Accusonic“:



13 Segmentlängen anhand WL vielfach höherer Harmonischer, die Steigung ist durch 12 Segmente dividiert. Das MR sollte zusätzlich auch noch absichtlich diese scharfen Kanten aufweisen und besser sein.. (Patent).

Das 13. Segment ist bereits der zyl. Mainbore Durchmesser, wieder mit einer vielfachen WL von (hier) Bb. Solche Mundrohre wurden/werden verkauft. Auch ein Schallbecher mit Segmenten nach diesem Konstruktionsprinzip findet sich im Patent. Woodoo? Siehe Teil 2-E.

Hape, US Patent, 1981 (ohne Abbildung):
Beschreibt ein Mundrohr – spez. für Perinet C-Trompeten ausgelegt, welches den notierten Bereich D2-A2 intonatorisch gegenüber einem Standard (Bach) C-Mundrohr verbessern soll. Er geht dabei auch auf die Tuning Slide Gaps und deren negative Effekte ein. Die Erfindung ist laut Patent gegenüber dem Standard Mundrohr eine stark ansteigende Erweiterung bei exakt 2,75“ = 7cm ab Beginn des Mundrohres.

Stimmung über Kluppenzug, nur dieses Feature ist ja z.b. bei Flügelhörnen beinahe von Beginn deren Erfindung an notwendiger Standard (wegen der kurzen zyl. Rohrlänge, bzw. auch auf Piccolo Instrumenten). Auf Impedanz-Magnituden / geänderte Ansprache geht Mr. Hape nicht ein.

Zylindrischer Rohre, ev. mit Ventilen oder Zugrohr zur Verlängerung der Luftsäule:

Unterschiedliche Bohrungsgrößen „Boresize“ enstprechen nicht automatisch einem engeren Spielgefühl oder einem höheren Luftverbrauch. Deutsche und osteuropäische Drehventilinstrumente werden wesentlich „zylindrischer“ und enger gebaut als ihre französischen und anglo-amerikanischen Verwandten, die dann aber auch andere Mundrohr- und Schallbechermensuren aufweisen!

Der „Brassiness“- Faktor, Schockwellen und das „Schmettern“ von Trompeten und Posaunen:
In engen und genügend langen zylindrischen Rohren bilden sich bei höherem Schalldruck Schockwellen aus. Umso enger und länger der zylindrische Rohranteil ausfällt, desto mehr bzw. schneller neigen Blechblasinstrumente zum Schmettern. Engere Bohrungen sonst vergleichbarer Instrumente begünstigen daher diesen typischen „Klangwechsel“ schon bei einer geringeren Lautstärke. Für eine gleich hohe abgestrahlte Gesamtlautstärke muß bei engerer Bohrung zwar mehr Energie aufgewendet werden, aber die „Strahlkraft“ und somit das Durchsetzungsvermögen tritt hier schon bei einer geringeren Lautstärke auf.

Unterschiedlich lange zusätzliche zylindrische Rohranteile durch Ventilverlängerung bewirken je Ventillänge jeweils eine wesentlich geänderte Intonation, Ansprache und Klang, da der Brassiness-Faktor steigt! Theor. optimierte Ventilschlaufenlängen sind im Teil 1 der Dokumentation behandelt. Auftretenden Mode-matching Effekte werden später separat beleuchtet. Umso länger die gesamte Rohrlänge =roundtrip time ist, umso mehr Verluste durch Reibung und weniger Energie die zu den Lippen zurückkehrt. Gaps (=Durchmesser-Erweiterungen) aufgrund zu kurzer Innenzüge, etc. sind ein ernsthaftes Übel. Sehr enge Bögen wirken sich unterschiedlich auf die Harmonizität aus, prinzipiell wirken sie aber wie eine Verkürzung samt Erweiterung.

Schallbecher:

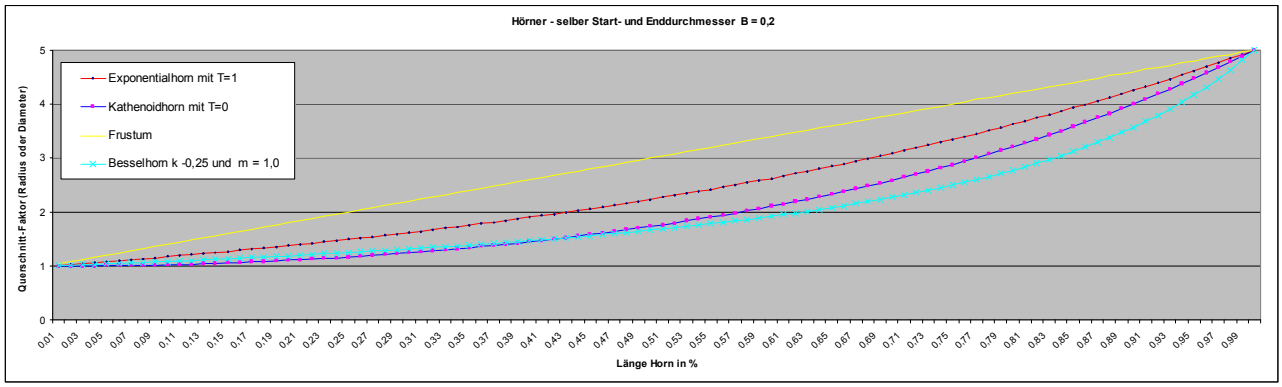
Hörner - Schallbecher sind Impedanzwandler. Sie gleichen die Impedanzunterschiede aus und ändern ihre akustisch wirksame Länge stark mit der Frequenz. Mit Ausnahme der linear konischen Schalltrichter ist die Phasengeschwindigkeit in Hörnen für lange Wellenlängen viel höher als die Schallgeschwindigkeit in freier Umgebung! Schallbecher erhöhen so die tiefsten Resonanzfreqenzen gegenüber einem Zylinder teils sehr stark, der allerletzte ausschweifende Teil „Bell-Skirt“ hat teilweise aber nur eher dekorativen Charakter.

Hörner = Impedanzwandler wirken in beide Richtungen; daher können sie im Gegenzug auch winzigste Druckunterschiede vom großen Ende hörbar machen. (Ohrtrompeten, akustische Abhöranlagen).
Dies ist natürlich stark abhängig von deren Dimensionen und Geometrien und unterscheidet die Hörner.

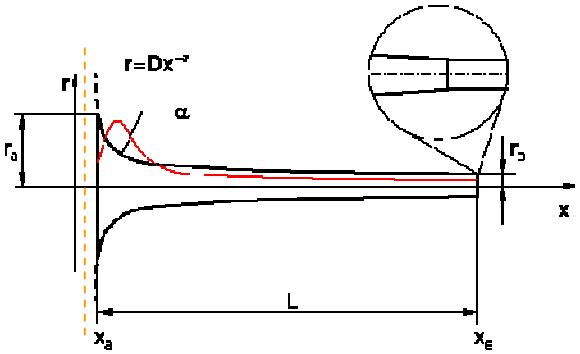
Merke: Gegenüber einem einseitig geschlossenen Zylinder verglichen:
Durch ein Mundstück und Mundrohr werden vor allem höhere Resonanzen verändert (vertieft),
durch einen Schallbecher werden vor allem die tieferen Resonanzen besonders erhöht,
(Enlargements an Flußbäuchen überwiegen gegenüber Enlargements an Druckbäuchen)

Es folgen vorerst eine grobe Übersicht, dann Formeln und anschließend Vergleiche sowie Kombinationen.

Mögliche Schallbecherformen, rot = berechnete Hornfunktion „U“:



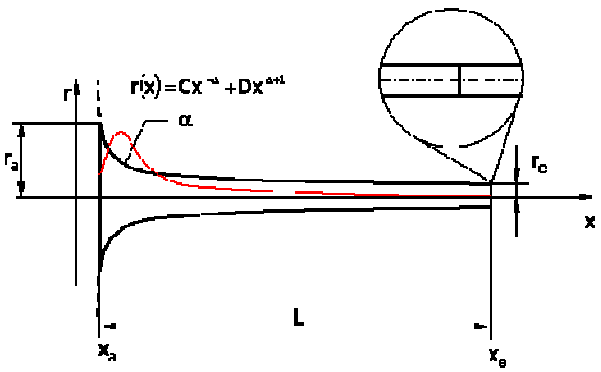
Besselhörner haben zu Beginn immer eine höhere Steigung als Katenoid, Besselflare m= Infinity ab +/- ~1000 = Exponentialhorn, m= -1 =Frustum, m=1 = Dual eines Frustum, m < 0,0001 = closed Zylinder.



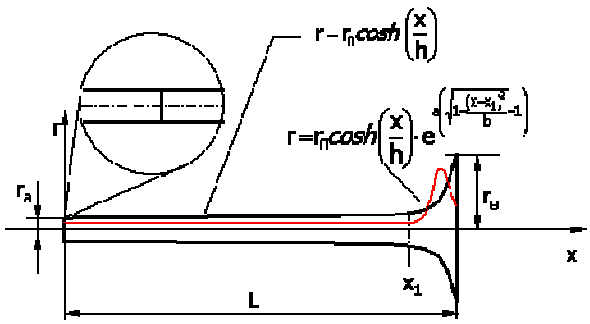
x0=Pos. nach den Becherende,wo Steigung infinite ist

Besselhorn: Nahezu alle anglo-amerikanischen (auch Jazz) -Trompeter spielen Trompeten, die grob einem französischen Modell „French Besson“ aus den 1920 Jahren nachempfunden sind. Diese unterscheiden sich von Drehventil-Trompeten nicht nur durch Lage und Bauart der Ventile, sondern auch durch die Länge und die Mensur des Mundrohres, der zyl. Bohrung und des Schallstücks. Es handelt sich hier **in etwa** um Formen wie jene von Besselhörnern mit einem Trichterexponenten von α=m ≈ 0,6-0,7.

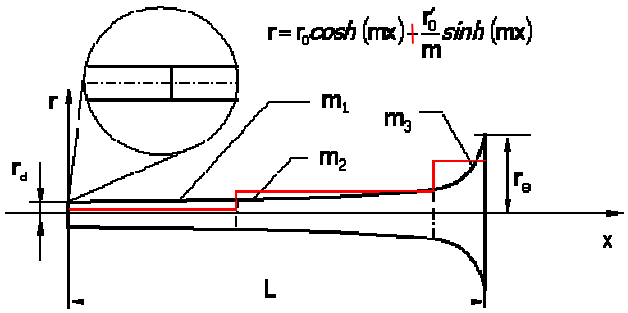
Dr. Arthur Benade hat diese Zusammenhänge aufgespürt und publiziert. Zur akustischen Berechnung sind mathematische „Bessel“ Funktionen erforderlich, daher der Name; Hr. Bessel hat die Hörner nicht erfunden! Nahezu alle Schallbecher seit dem 16. Jahrhundert nähern sich einer Besselform (m 0,6 -1,0) **teilweise** an.



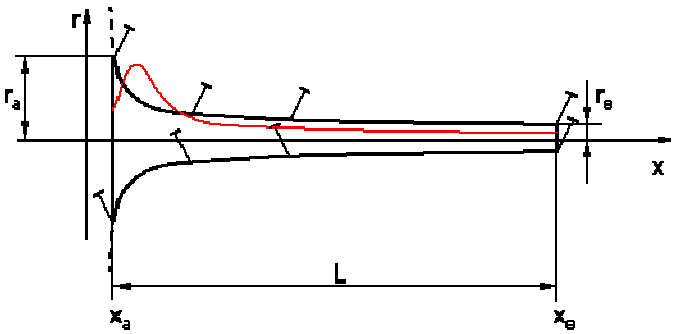
Robert W. Pyle hat eine Verbesserung des Besselhorns vorgeschlagen. Er hat die Mensur am schlanken Ende des Schallstücks so umgestaltet, daß der Übergang zum zylindrischen Rohr ohne Knick verlaufen könnte. Das Schallstück soll so keine unerwünschten Reflexionen (Mode-Matching) hervorrufen. Wurden ev. Bb-Trompeten Schallbecher der Marke Benge nach diesem Prinzip konstruiert?



William Cardwell hat eine Mensur patentieren lassen, die aus nur einem Katenoid-Segment mit daran anschließender Stürze besteht. Das Schallstück ist verhältnismäßig schlank. Es weitet sich dann auf einer kurzen Strecke mit einer recht starken Krümmung auf. Cardwells Catenoid-Mensur ist aufgrund dieser Eigenschaften optisch leicht zu erkennen. Man findet diese Form vor allem bei Piccolo-Trompeten.
(Das Patent ist für eine hoch F-Trompete, später mehr dazu).



Earle Kent hat für C. G. Conn Schallbecher Mensuren zum Patent angemeldet, die aus drei oder mehr Katenoid-Segmenten aufgebaut ist. Das soll einem Konstrukteur ermöglichen, die Stimmung der Resonanzen in den einzelnen Registern des Instruments gezielt zu beeinflussen (Später mehr dazu).



Viele Instrumentenbauer konstruieren ihre Mensuren, indem sie einige Punkte festlegen, dort Reißnägel einschlagen, und ein biegsames Lineal oder einen Draht über die Nägel spannen. Das gleiche geschieht rechnerisch, wenn ein Konstrukteur etwa mit CAD gezeichnete Punkte durch eine Spline-Kurve verbindet.

Die Biegelinie eignet sie sich dazu, Mensuren zu realisieren, die nicht durch eine geschlossene mathematische Funktion darstellbar sind. Das können historische Mensuren sein, aber auch Mensuren die z. B. nach dem Verfahren von Klaus Wogram oder durch den BIOS-Optimierer errechnet wurden, Nachbauten oder auf gut Glück. Eine solche Form taucht bei so gut wie allen Schallbechern auf.

Quellen / Grafiken ©:
http://hans-henning-moeller.de

Salmon-Hörner: Konstante Cutoff Frequenz und (niedrige) Hornfunktion:

Herr Salmon hat die besonderen Eigenschaften dieser Kategorie von Hörnern untersucht, daher die Bezeichnung. Salmon Hörner – können anhand der existierenden Formeln in spezielle Formen wie

Katenoid Hörner = Steigung am Beginn 0, glatter Rohranschluß an Zylinder möglich
Exponential Hörner = auch Besselhorn mit Flarefaktor infinite +, infinite -
Konische Hörner (Frustum) = auch Besselhorn mit Flarefaktor -1
sowie alle Mischformen dazwischen eingeteilt werden. Alle haben eine fixe Cutoff Frequenz -> Hornfunktion.

Schallwellen mit einer Kreiswellenzahl ***k*** < **m** bilden sich in unendlich langen „Salmon-Hörnern“ **nicht** aus!
Daraus ergeben sich eine sogenannte „Cutt-off“ Frequenz „fc“ bzw. der Flarefaktor „m“ welcher diese liefert. Wichtig und interessant dabei ist, daß diese Cutt-off Frequenz nichts mit der Länge des Horns zu tun hat, solange die Länge viel größer als der Startdurchmesser bleibt. **Hornfunktion U = (m)² = konstant!**

Kreiswellenzahl *k* = (2*pi * Frequenz) / c = ω/c c = Schallgeschwindigkeit in free Air in m/Sek

Flarefaktor „h“ ist der Reziprokwert von „m“ 1/m = „h“ -> 1/h = „m“ *mit S=Fläche, r=Radius*

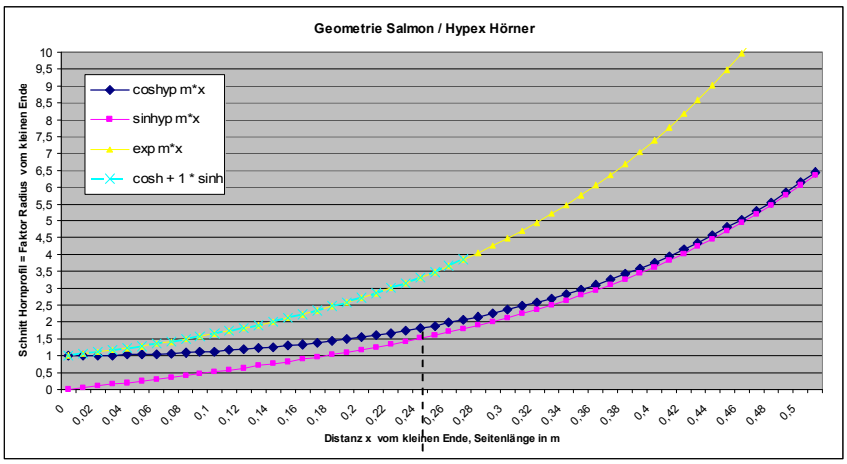
Wenn **m** als Steigung des Querschnittes genommen wird: -->nenne ich es wie **Kent**/Fletcher/Rossing „m“.
Umso größer „m“, also höhere Flare Rate, desto höhere Cut off Frequenz, umso stärkere Erhöhung tiefer Freqenzen = Verkürzung equiv. CC Rohrlänge; („m“ ist die Steigungsgröße im Raum/Geometrie-Bereich)

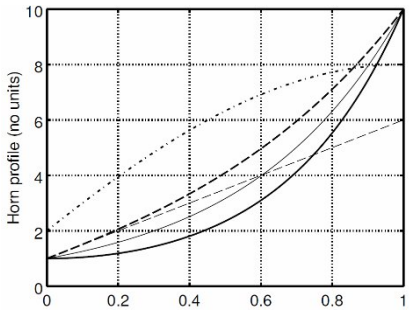
fc	=	untere „cutoff“ Frequenz	=	**(c *m) / (2*π)**	mit S(x) = S0 * exp(2 * m * x)
m	=	Flare-Rate	=	(2*π *fc) / c	oder r(x) = r * exp (m * x)

Wenn **m** als „kleiner“ **Reziprokwert** von k genommen wird:-->nenne ich es wie Morse und Cardwell „h“.
Umso kleiner „h“, desto höhere Flare Rate, desto höhere Cut off Frequenz, umso stärkere Erhöhung / Verkürzung tiefer Freqenzen: („h“ ist die Längengröße im Raum/Geometrie-Bereich“)

fc	=	untere „cutt-off“ Frequenz	=	c / **(2*π * h)**	
h	=	Flare-Rate	=	c / (2*π * fc)	*Klammern sind entscheidend!*

Beachten: m als Steigung des Querschnittes (Radius) oder m als Steigung der Querschnittfläche:
*Hier unterscheiden sich meine, Morse u. Cardwell Formeln von anderen Quellen, (z.B. Kolbrek, Wikipedia): Solche lauten dann für das Exponentialhorn: Sx = S0 * exp (m*x) und Fc = (c * m) / (**4** * pi). Steigung „m“ Fläche ist exakt 2x so groß, 1/m = „h“ dann halb so groß; die Cutoff –Frequenz ist aber immer die selbe! m beschreibt dann die Steigung der Fläche f'(x). Flächenänderung gegenüber Radiusänderung = **Faktor** ^2*





Beispiel Querschnitt-Flare m = 5,0 bzw. (1/m->h =0,2**)** **Cuttoff Freq**. beider Hörner: **272,9 Hz** bei 343m/sek.,
Blau = Katenoidhorn (=glatter Rohranschluß) r= coshyp (mx)-> bei Länge h = coshyp(1) = 1,543 x Radius
Gelb = Exponentialhorn =exp(mx), dieses setzt sich aus coshyp(mx**)** **+** 1* sinhyp (mx) zusammen (türkis),
Bei gleicher Cutoff Frequenz hat das Exponentialhorn eine wesentlich größere Steigung und Endausladung.

Grafik rechts: Salmon Hornfamilie, von unten links aufwärts: Katenoid bzw. hyperbolic cosine; Exponential, Konus bzw. Frustum, hyperbolic sine, sinusiodal bzw. parabolisch geformter Waveguide.

Salmon Hörner, Berechnung Geometrie:

*Hinweis: m=Steigung Radius, (2*pi*fc) / c = Kreiswellenzahl der Cutoff Frequenz, (h= 1/m)*

Querschnittfläche S bei Entfernung x:
=Querschnittfläche kleines Ende **Sx0** * [coshyp (x * 2*pi*fc/ c) + **T** * sinhyp (x * 2*pi*fc / c)] **^2**

Coshyp (x*m) + [T * Sinhyp (x*m)] gibt den Querschnitt-**Faktor** (zum kleinen Ende) bei x
Coshyp (x/h) + [T * Sinhyp (x/h)] gibt den Querschnitt-**Faktor** (zum kleinen Ende) bei x

T ist der Gestalt-Faktor der sogenannten Hypex-Hörner. Besondere Fälle sind wenn T gleich 1 oder 0 ist:
Mr. Salmon wirbt in seinem Patent für Lautsprecher-Schalltrichter für einen idealen T-Wert von ~ 0,6!
-> siehe Transmission Coeffizient!

Katenoidhorn:
Coshyp (x*m)**+** 0T *Sinhyp(x*m) = „Catenoidal“ = glatter Anschluß an Zylinder (Steigung Start = Null)
oder Coshyp (x/**h**) = „Kettenlinie“ *(hier fällt der rechte Teil der Formel komplett weg, da T = 0)*
-> Coshyp (0)=1,0 -> gibt bei Seitenlänge x=h = Coshyp(1,0) = 1,54308 facher Radius

Exponentialhorn:
Coshyp (x/h)**+** 1T *Sinhyp(x/h) = Exponential-Horn, 1*coxhyp + 1 * sinhyp = exp
-> = exp(x*m) = exp (x/h) -> bei Seitenlänge x=h = Exp(1,0) = 2,71828 facher Radius (Eulersche Zahl)
-> exp(0)=1,0 -> T entspricht hier dem Steigungswinkel dy/dx bei x0 =Tangente

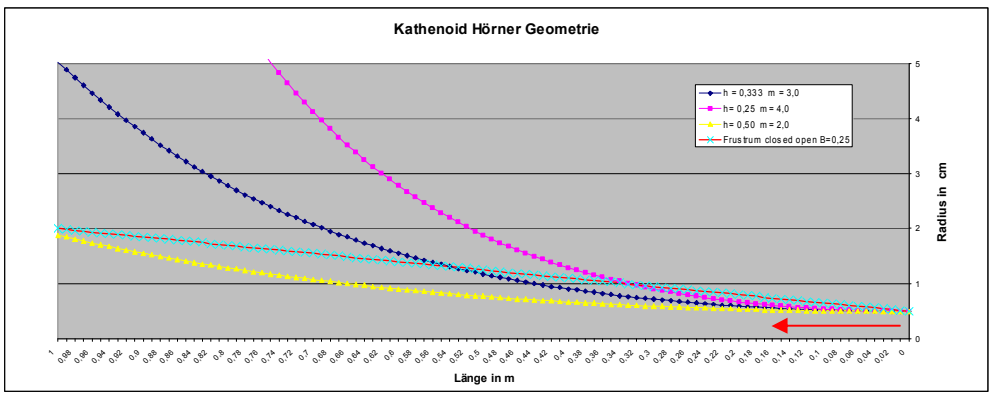
Auch der truncated Cone = Frustum kann als Salmonhorn behandelt werden,
dieser hat konstant keine untere Cutoff Freq. = 0 Hz, Hornfunktion U = konstant 0!

Flarefaktor m = 0 +ein sehr kleiner Betrag wegen Div/0 -> m=0,00001
Radius = r0 * (1 + x / x0) x = Abstand zum kleinen Ende, x0 = Länge der fehlenden Spitze

oder etwas viel „komplizierter“ mit der Formel passend für die Salmon-Hörner:

Radius = r0 * [Coshyp (x*m) **+** T * Sinhyp(x*m)] wobei hier Konstante T = 1 / (m*x0)
gibt ~1 *Konstante* *0 ->aufsteigend* *gibt die passende konstante Steigung*

1-Segment Katenoid-Hörner & Frustum closed-open, Geometrie:



Start Radius = 0,5 cm; hier 3 verschiedene „Flarefaktoren“ m bzw. 1/m = h, sowie ein Frustum B=0,25
Horn Funktion U = m² konisches Frustum: U=0
Schallwellen mit Kreiswellenzahl ***k*** < **m** werden nicht abgestrahlt & kein Cutt-off, 0 Hz

Hier ist vorerst keine Hornlänge definiert. Die Cutoff-Frequenz und Transmission Coeffizienten hängen vom „Flare“ =die Krümmung der Steigung ab. Werden ein Enddurchmesser und eine finite Länge vorgegeben, dann ergibt sich daraus nur ein einziger möglicher Flarefaktor, der die Kettenlienienform oder im Fall des Exponentialhorns die exponentiale Form liefert. (Im Fall des Frustum die Länge der fehlenden Spitze.)

Wird die Hornlänge variiert, der Enddurchmesser aber belassen, so ändern sich der Flarefaktor + Cuttoff Frequenz und nun Resonanzfrequenzen. Die Inharmonizität =Abweichungen gegenüber einem gleich langen Konus mit Spitze u. selber Endkorrektur ändert sich allerdings nur minimal (kürzeres Horn Mode 1 höher)

Hörner als passive Verstärker z.b. von Lautsprechern, Situation:

Hier soll möglichst viel abgestrahlt werden, Reflektionen =stehende Wellen sind möglichst **nicht** erwünscht:
Unterhalb der Cut-off Frequenz fände keine Wellenausbreitung statt, das gilt nur für unendlich lange Hörner!
Finite Hörner in Kombination mit weiteren „transportieren" Schallwellen auch unterhalb der Cut-off Frequenz.
Finite Hörner mit einer möglichst niedrigen Cut-off Frequenz müssen auch sehr lang sein!
Transmission Coefficient Werte < 0,5 gelten dann als ineffizient (konisches Frustum und Exponentialhorn).

Transmission Coefficient (Faktor) t:
Beschreibt das Verhältnis zu einem unendlich langen zyl. Rohr mit selbem Startdurchmesser: ***tzyl=1,0***
Stellen wir uns die Transmission Coeffizienten auch als "Input-Impedanz-Magnituden-Potential"- Wert vor!
Cutoff: Frequenz Fc= c/2*pi*h Wellenlänge WL cutoff= 2*pi*h mit h anhand Radius

Katenoid Horn: tkat= **1 /** √ 1- (Fc / f)²
Transmission Coefficient ist der Kehrwert, und tkat ist bei tiefen Frequenzen >1!
Höhere Phasengeschwindigkeit c' =c0 / √ [1- (Fc / f)²]

Exponential Horn: texp= √ 1- (Fc / f)²
texp= √ 1- (WL / WL Cut-off) ²
Höhere Phasengeschwindigkeit c' =c0 / 1- (Fc / f)²

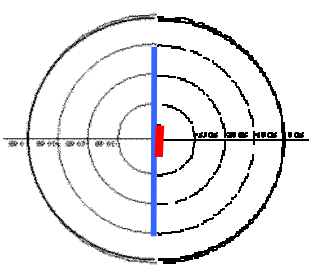
Frustum closed–open: tcone= **1 /** [**1+** (WL / (2 pi x0)²)] *x0 = L fehlende Spitze*
Frequenz mit tcone=0,5 liegt hier bei = c * (a-b) /(2pi L b) *mit Radius a groß, b klein, L=Seitenlänge Frustum*
Phasengeschwindigkeit c' nicht geändert, = c0 keine untere Cutoff Frequenz, aber ineffizient.

Radiation = Abstrahlung, hier von einem „circular baffled Piston" = ein runder Ventilkolben (z. B. Lautsprechermembran) in einer „sehr großen Wand"

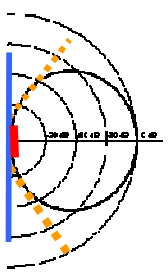
k = Kreiswellenzahl = **2***π *f / c a = Radius des Kolbens in Meter c = Speed of Sound in free air.

			k*a =	k*a -> Cut off bei ka ~1,0
Radius 1,0cm		* a = 0,01	= 0,05	
2,5cm	250 Hz = k 4,58	* a = 0,025	= 0,11	
5,0cm		* a = 0,05	= 0,23 (A)	*Basslautsprecher 20"*
25,0cm		* a = 0,25	= 1,15	
Radius 1,0cm		* a = 0,01	= 0,229	
2,5cm	1250 Hz = k 22,9	* a = 0,025	= 0,57	
5,0cm		* a = 0,05	= 1,15 (B)	*~ in etwa Trompeten-*
25,0cm		* a = 0,25	= 5,73	*Dimension*
Radius 1,0cm		* a = 0,01	= 1,0	
2,5cm	5500 Hz = k 100,75	* a = 0,025	= 2,52	*(~ kleine Kopfhöhrer)*
5,0cm		* a = 0,05	= 5,04 (C)	
25,0cm		* a = 0,25	= 25,2	

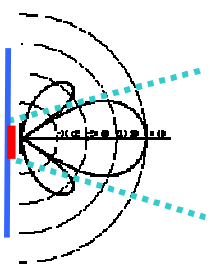
Richtcharakteristik / Abstrahlung: Tiefe Frequenzen k*a < 1 würden auch sich auch hinter die Wand „Baffle" ausbreiten. (Bzw. einer ganzen Lautsprecherbox) . Daher ist es für Subwoofer =Basslautsprecher nicht mehr so wichtig in welche Richtung diese exakt platziert werden, detto Kontrabasstuba!



A)Tiefe Frequenzanteile, ka < 1 werden bis 360 Grad abgestrahlt!



B) mittlere Frequ.Anteile, ka > 1 Abstrahlwinkel trichterförmig



C) hohe Freq.Anteile, ka > > 1 sehr fokusierte Abstrahlung, Sidelobes

Hörner als Resonatoren - welche Variablen ändern sich?

Hörner verglichen mit gleich langen, zylindrischen Rohren (jeweils am „kleinen“ Ende geschlossen) = CC

Konstanten, die sich nicht ändern:
Zeitdifferenz, die physische Länge, die Temperatur und die idealisierten folgenden Randbedingungen:
Druckbauch am geschlossenen Ende, Flußbauch am offenen Ende, die Anzahl von Druck- und Flußknoten.
Der Anteil an Wellenlängen, die in einseitig geschlossene Geometrien „passen“ = ¼ * WL + 0,5* n-1

Variablen, die sich durch die Geometrieänderungen verändern:
Eine relevante Variable, die übrig bleibt ist die **Phasengeschwindigkeit** anhand der Luftdichte/Fläche.
Lange Wellenlängen = wenig Druckbäuche breiten sich schneller aus als kurze Wellenlängen.

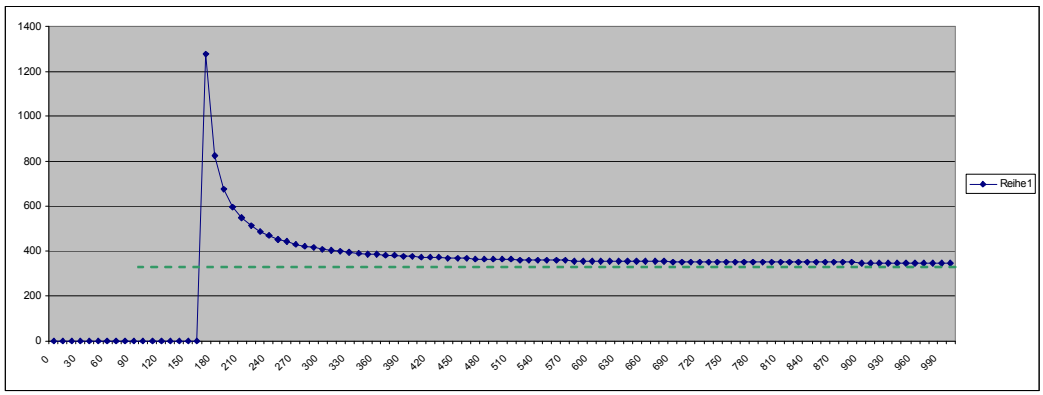
Nur beim Konus und beim Zylinder halten sich vor- und rücklaufende Wellengeschwindigkeiten die Waage und gleichen sich dadurch aus, Reflektionen finden erst am offenen Ende statt.

Es ändern sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten und somit Wellenlängen = Resonanzfrequenzen!
Die Reflektionspunkte wandern bei Hörnern bei tiefen Moden zunehmend in das Horn hinein <-- =
kürzere Roundtrip Time = eine höhere Geschwindigkeit = höhere Schwingungszahl pro Zeit = Frequenz.

Alternativ zu „effektiven Längen eines CC“ muß man von geänderten Phasengeschwindigkeiten c’ sprechen:

Katenoidhörner:

eL CC	=	L * Ö [1- (c / (2*pi*h*f)) ²]	Cardwell lt. Morse
Phasengeschwindigkeit c’	=	c0 / Ö [1- (c / (2*pi*h*f)) ²]	Morse, anhand Radius
Springer, selbes Ergebnis: c’	=	(2*pi*f) * [1/ Ö {(w²/c²) – m² }] = w * [1 / Ö (k² - U)]	
Gruppengeschwindigkeit vg	=	c0 * Ö [1- (WL/ WL cut off)²] = c * Ö [1- (Fc / f)²]	



Katenoid Horn closed-open, effektive höhere Phasengeschwindigkeit in m/Sek, mit der Frequenz gegenüber einem Zylinder selber Länge und c0 =343 m/Sek. (Endkorrekturen hier nicht berücksichtigt)
Cuttoff Frequ. 163 Hz = Querschnitt m=3,0 1/m = h = 0,333 x-Achse: Frequenz y-Achse c’ = m/Sek
Hier ist 1 / Transmission Coeffizient = äquivalente Längenfaktoren eines CC. (T= 0* sinhyp(mx) = 0.)

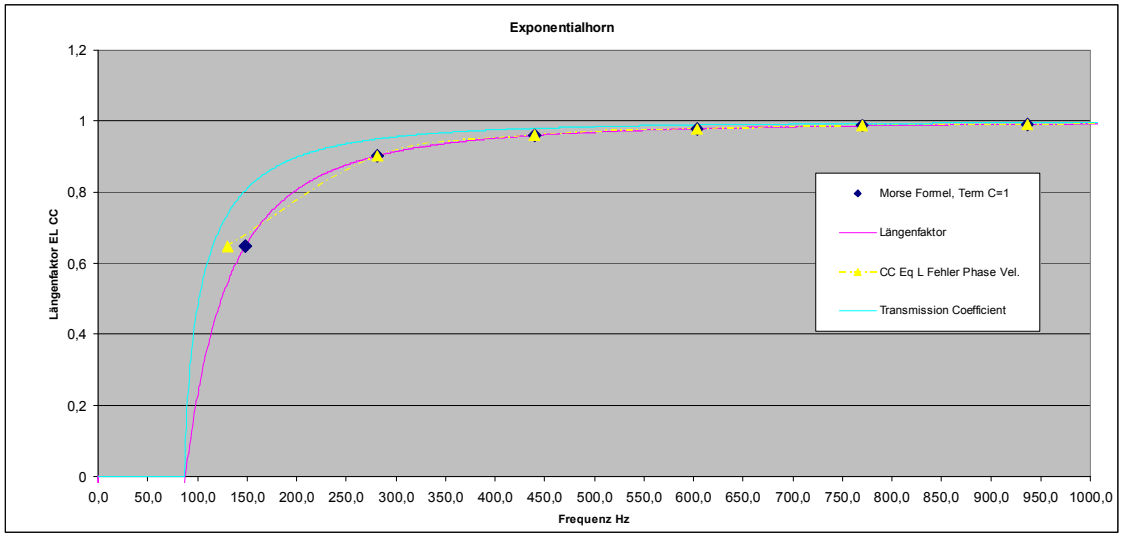
Der Transmission Coeffizient (Faktor) ist nicht immer gleich dem Faktor effektiver Längen eines CC!

Entgegen aller bisher gefundenen Quellen, (beruhen scheinbar alle auf Webster / Morse) welche aussagen, der Transmission Coeffizient wäre auch gleichzeitig der Faktor für die geänderten Phasengeschwindigkeiten, habe ich festgestellt, daß dies **bei finiten Exponentialhörnern nicht der Fall** ist!

Exponentialhörner:

Bei Exponentialhörnern wären mit obiger Formel die unteren 4-5 Resonanzen **wesentlich** zu tief.
Wird aber die Quadratwurzel aus der Formel verbannt, so ist die Länge/Geschwindigkeit nur noch beim 1. Resonanzmode zu tief, die so ermittelte Kurve stimmt nahe der Cuttoff Frequenz nicht mehr überein.

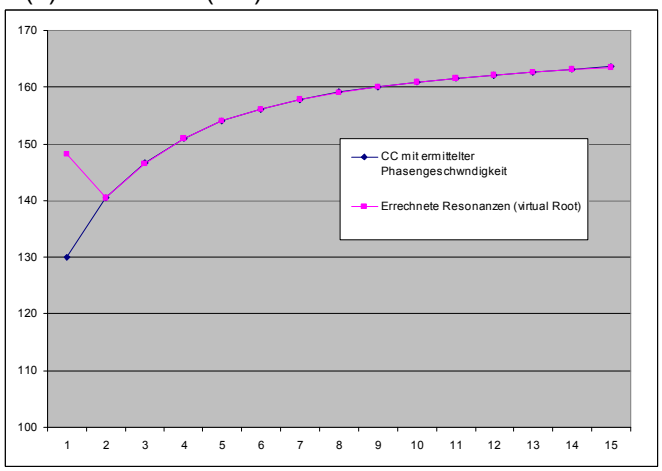
eL CC	=	L * ~~Wurzel aus~~ [1- (c / (2*pi*h*f)) ²]	Cardwell lt. Morse
Phasengeschwindigkeit c’	=	c0 / ~~Wurzel aus~~ [1- (c / (2*pi*h*f)) ²]	Morse, anhand Radius
Ballantine anhand S = c’	=	c0 / ~~Wurzel aus~~ [1- (c*m)² / 2² * (2pi*f)²]	mit m=Fläche



Länge 1m, Startradius=0,005m Endradius=0,025m B = 0,2 h=0,621 m=1,61 Fc= 87,8 Hz c=343m/Sek.

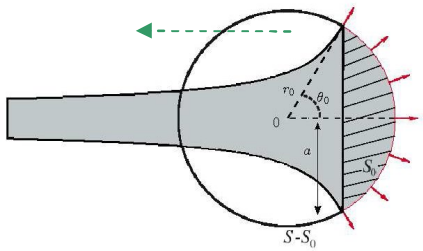
Die Quadratwurzel in der Formel bestimmt die Steigung der Coeffizientenkurven. Nur wenn die ermittelten Resonanzfrequenzen eines equivaläntenClosed Cyl. (anhand der höheren Phasengeschwindigkeit) an der errechneten Längenfaktorkurve anliegen, wäre diese Kurve auch richtig und korrekt berechnet worden:

f(n) = (n*2)-1 * höhere Phasengeschwindigkeit c' / 4 * Hornlänge inkl. Endkorrektur
=f(n) = (n*2)-1 * 1/LF / 4 * Hornlänge inkl. Endkorrektur



Die resultierende 1. Resonanzfrequenz ist wesentlich höher als anhand der korrigierten Kurve berechnet.
D.h. die tatsächliche Phasengeschwindigkeit c' ist hier kurz oberhalb der Cutoff Freq. viel höher.
Die LF Kurve müsste hier noch flacher verlaufen. D. h. es fehlt ein Faktor, der nahe Cutoff sehr groß ist, ab Mode #2 aber bereits verschwindend gering wird. *Vielleicht finde ich einmal eine exakt passende Formel :)*

Eine **variable Endkorrektur LP** am offenen Ende anhand größerem Radius**=tiefere Grundstimmung ?**
Lp bei einem offenen Ende (in einer großen Wand): **L +** 8*Radius / 3* Pi( ) = Radius*0,8488 (Morse)
Lp bei einem offenen Resonatorende ohne „Flange“: **L +** = Radius*0,6133 (Levine et al)



Variablen Propagation, Radiation und Abstrahlwinkel, Reflektion, sphärische Wellenfronten
Winkel in Radiant = Steigung, r0 = Radius Sphäre 0 anhand Steigung, S0 ~ effektive Querschnittfläche
Hier muß man aber bedenken, daß tiefe Frequenzen bereits wesentlich früher reflektiert werden, sobald die Hornfunktion nicht mehr konstant ist, d.h. steigende Krümmung und finite Hornabmessungen.

Horngestalt und Differentialrechnung

Mathematische Funktionen können grafisch in einem klassischem x/y Diagramm beschrieben werden. In unserem Fall ist die X-Achse die Entfernung bzw. Position und die Y-Achse der Radius bei Pos. x. Positionsangaben werden üblicherweise z. B. mit „P“ für Start- und und „Q“ für Zielpunkte jeweils mit der Position x,y beschrieben. F(x) bedeutet nichts anderes als den y-Wert an der Position x im Diagramm, in diesem Fall die halbe Hornkontur (=Radius). Die x-Auflösung sollte möglichst gegen Limes (0) streben.

Steigung bezeichnet die Sekantensteigung und auch die Tangentensteigung, dh. den Winkel der Tangente. Die Sekante ist eine gerade Linie, die 2 Punkte P und Q auf der Funktionskurve verbindet. Sie ergibt die durchschnittl. **Steigung** (arithm. Mittel) zwischen diesen 2 Punkten. Differenz y / Differenz x =dy/dx = **F ’(x)**

Zum Ermitteln einer „Steigung“ geht man auf der x-Achse 1 Punkt nach rechts und dann die notwendige Anzahl der Punkte auf oder abwärts, welche die Steigung definieren. Steigung m = 2 bedeutet z.B. 1 Schritt x nach rechts und danach 2 Schritte aufwärts. Bei einem Horn ist die Steigung üblicherweise nur positiv.
dy/dx=F’(x) =Tangens ½ Öffnungswinkel in Radiant, der Winkel selbst = arctan (F’(x)) in Radiant
Steigung m=0=waagrecht, m=unendlich=senkrecht 90°; Steigung m=1,0 =45 Grad=100%, h=1/m=1,0

Krümmung der Steigung / Zunahme der Steigung = 2. Ableitung bzw. F’’(x):

Ist die Funktion F(x) linear, ändert sich die Steigung nicht. Konus / Frustum: F’(x)=m=konstant, F’’(x) = 0. Z.B. wäre mit m=2,0 bei Länge 1,0 der 2fache Radiuszuwachs, der 1fache Zuwachs bei 1/m=h=0,5 Länge.

Ist die Funktion = Hornkontur F(x) und somit F’(x) nicht linear = gerade, dann ändert sich die Steigung.

z.B. Exponentialhorn: F(x) = Eulersche Zahl = Exp(1) = 2,718.. ^(m * x)
z.B. Coshyp- bzw. Katenoidhorn: F(x) = Coshyp von (1) = 1,5430..^(m * x)

Bei diesen beiden „besonderen“ Hornkonturen ändert sich zwar **m** nicht, allerdings wird m im Exponenten mit der Entfernung vom kleinen Ende multipliziert und sorgt dadurch für eine stetig wachsende Steigung.

So erkennt man die Bedeutung der Steigung „m“ des Radius:
Exponentialhorn: Sei m = 1 so wäre bei x=1,0 der Radius um das 2,718.. größer. -> exp(1*x)
Sei m = 4 so wäre 4x schneller = bei x = 0,25 der Radius um Faktor 2,718...höher
„h“ ist in der Differentialrechnung eine Längendifferenz zu x
folglich wäre hier h = 1/m =nur mehr 1/4 = 0,25 Länge für Faktor 2,718..

Beim Katenoidhorn: Ist es genauso, nur der Faktor ist hier mit m=1 =1,5430.. bei Länge 1,0

z.B. Besselhorn: F(x) = B / ((x0+ x) ^ m) *mit B = komplexer Parameter*

Hier wird es schon schwieriger: Flarefaktor m -> unendlich groß ergibt ein Exponentialhorn
Flarefaktor m -> gegen 0 ergibt einen Zylinder mit m = +0,000x
Flarefaktor m -> -1 ergibt einen Konus ohne Spitze (Frustum)

Umso größer der Flarefaktor m, desto weniger verschiebt sich die Änderung der Steigung gegenüber Exp. Umso kleiner der Flarefaktor m, desto weiter verschiebt sich die Änderung der Steigung zum großen Ende. Und da sind wir bei der Änderung der Steigung/Krümmung --> 2. Ableitung von F(x): f’’(x) = [d²y / dx²]

Für mathematische Funktionen und so berechnete Hörner gibt es entsprechende „Ableitungs-Regeln“ und Formeln, diese sind exakt. Jede folgende höhere Ableitung (n+1) anhand mathematischer Regeln verwendet dabei immer wiederum den abgeleiteten y-Wert der vorangegangenen Ableitung für jede weitere Ableitung.

Differenzieren = Ableiten kann man eine Funktion F(x), die stetig ist und keine Sprünge macht.

Beispiele:	Geometrie=	Steigung=
Exponentiell:	Funktion F(x) = exp(m*x)	Ableitung: f’(x)---> = m* (exp(m*x)
Katenoidal:	Funktion F(x) = coshyp(m*x)	Ableitung: f’(x)---> = m * { (e^(mx) - e^-(mx)) /2}

Wobei sich bei diesen beiden mathematischen Sonderkonstellationen der besondere Fall einstellt, daß sämtliche weiteren Ableitungen immer die selben Ergebnisse abwechselnd liefern (Start 0 oder Start 1).

Hornkonturen und Funktionsgraphen ohne mathematische Funktion, oder einer Funktion die man vorab nicht kennt oder die man kennt, aber überschlägig und oft hinreichend genau ermitteln möchte:

Hier kann man die Ableitungen anhand des Differential Quotienten mit Hilfe der „Zentralen 5 Punkte Differenzen Formeln“ näherungsweise bestimmen. Umso mehr Stützstellen = Messwerte vorliegen, desto kleiner wird der Abstand „h“ auf der x-Achse.

Es wird dabei die Steigung von einem Punkt x(i) = die zu ermittelnde Position und der nächsten Stützstelle, die den Abstand „h“ entfernt ist = x(i+1) ermittelt, ebenso zur vorhergehenden Stützstelle = x(i-1) und daraus der arithmetische Mittelwert gebildet. Dieser ergibt näherungsweise die Tangentensteigung am Punkt x(i).
Bei einem sehr stark ausladenden Schallbecher(ende) ist die so ermittelte Steigung aber tendenziell immer etwas zu hoch, da die Steigung nach x(i) ja immer höher ist als jene zuvor.

Mit ausreichend Stützstellen (Abstand „h“ Limes gegen Null) ist die Abweichung jedoch vernachlässigbar. Ein Nachteil ist bei der geschilderten 5 Punkte – Methode, daß die beiden ersten und letzten Werte nicht ermittelt werden können. (Bis Ableitung #1+2 nur jeweils der erste und letzte Wert – da hier nur 3 Punkte). Für die Berechnung der Hornfunktion werden nur die Ableitungen #1 und #2 benötigt.

Ableitungen mit Hilfe der zentralen Differenzen-Formeln:

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

1. Ableitung, Zusammenhänge gibt die STEIGUNG

$$y_i' \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad \text{(vorwärts genommene Differenzenformel)}$$

$$y_i' \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad \text{(rückwärts genommene Differenzenformel)}$$

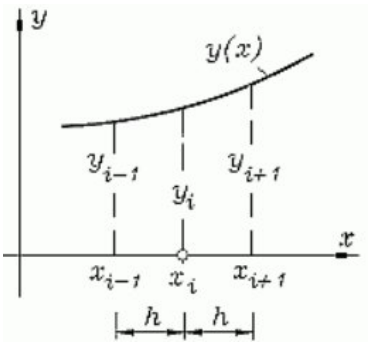
1. Ableitung vorwärts und rückwärts

$$y_i' \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_i = \frac{1}{2}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

1. Ableitung (vor- +rückwärts =zentral) =STEIGUNG

$$y_i'' \approx \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_i = \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_i = \frac{1}{h}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)$$

2. Ableitung (zentral) gibt die Änderung der Steigung



x (i) +/- h h=dx, i=Index, Integer
Es werden Steigungsdreieicke gebildet.

$$y_i' \approx \frac{1}{2h}(-y_{i-1} + y_{i+1}) \quad ,$$

$$y_i'' \approx \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \quad ,$$

$$y_i''' \approx \frac{1}{2h^3}(-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2})$$

$$y_i'''' \approx \frac{1}{h^4}(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2})$$

Die Ableitungen #1 bis #4 (zentral)
Bei f‘’‘(x) und f’’‘’ (x) kommt (i +/- 2) hinzu!

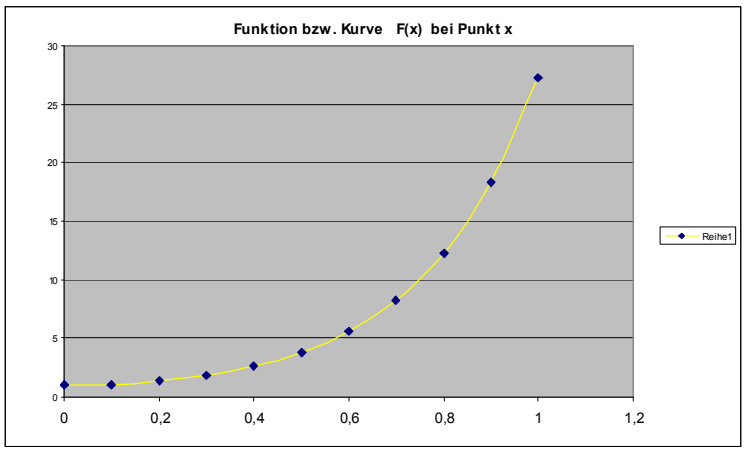
Die y(x) –Werte in diesen Formeln sind die **nichtabgeleiteten** Werte, dh. die Werte von F(x) =Hornkontur!

Die Bedeutung der abgeleiteten Werte / Funktionskurven:

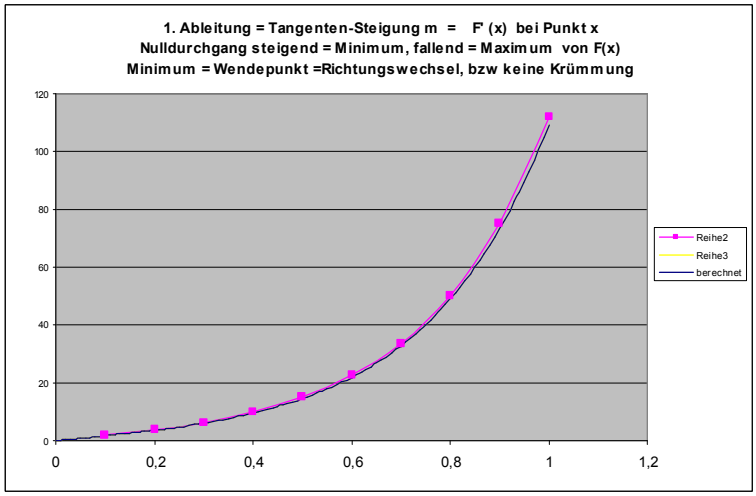
d = Differenz oder Delta, dx=h

Die Funktion F(x)	=	Radius (y-Wert) bei Position x auf der Längsachse x
1. Ableitung f’(x) = dy / dx	=	Radiusdifferenz durch Abstand von 2 Punkten auf der X-Achse
=~ y’i	=	Radiuszunahme bei einem Horn in Metern / Abstanddifferenz in m
	=	**Steigung am Punkt x** 0 = Sattelpunkt ohne Steigung
	=	bei Hörnern > 0 und streng monoton steigend.
2. Ableitung f’’(x) = [d²y / dx²]	=	**Änderung der Steigung** (Krümmung) am Punkt x gegen eine Gerade
3. Ableitung f’’’(x) = [d³y / dx³]	=	**Wendepunkte** (diese gibt es bei Hörnern nicht)
4. Ableitung....		Änderung der 3. Ableitung

Wobei F’’(x) / F(x) vom Radius = U, die Hornfunktion = k^2 und die cut-off Frequenz in Hz = **(c *k) / (2*π)**
hier mit der Annahme ebener Wellenfronten.

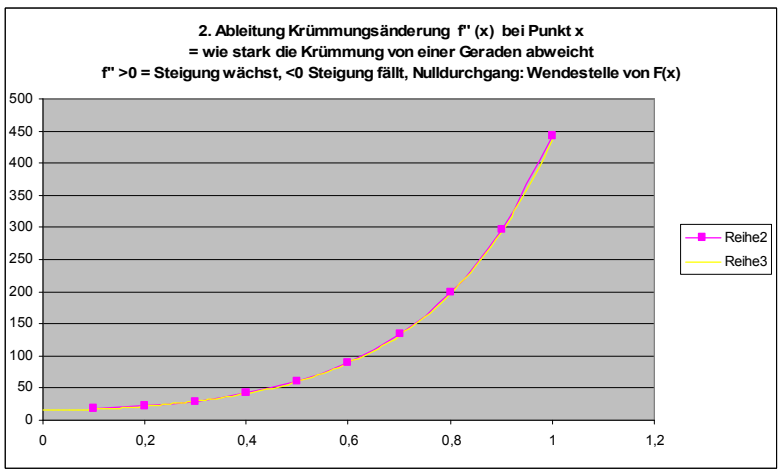


Beispiel: F(x)=Hornkontur (Radius) eines Katenoidhorns, L 1,0m Startradius 0,01m, m=4= F(x) = 0,01 (coshyp(4*x))*



1. Ableitung = Steigung, Rosa nur 10 Stützstellen (zu wenig), gelb =100 Stützstellen dx=h=0,01 Meter (=1%) (m=4)
blau = Ableitung berechnet = exakt, diese überdeckt die Annäherung von gelb vollständig=hinreichend genau.

Katenoidal: Funktion F(x) = coshyp(m*x) Ableitung: f'(x)---> = m * { (e^(mx) - e^-(mx)) /2}
bei x0 = 0 Steigung.



2. Ableitung = Änderung der Steigung/Krümmung, Rosa nur 10 Stützstellen, gelb = 100 Stützstellen
(10 Stützstellen hier sind eindeutig zu wenig), speziell bei starker Krümmungsänderung
Wie schon erwähnt ändern sich die Gestalt der Ableitungs-Graphen bei Exponential und coshyp(mx) Hörnern nicht.
Bei x0 = Änderung der Krümmung aber >0 ! Die Krümmung wird fortlaufend immer höher.
Bei Katenoid, Exponentialhorn und Hyperbolic sine Waveguide, mit m=4:
F''(x) / F(x) = m^2 = U bzw k^2 =16 k=w/c = 4 Fc= k*c /2*pi = 220 Hz *Bei Sinusiodal: F''(x) / F(x) = $-m^2$*
Beim Katenoid: Tangens (Steigung Radius) = Arctan (tan aus Steigung Radius), Winkel Steigung=Steigung!

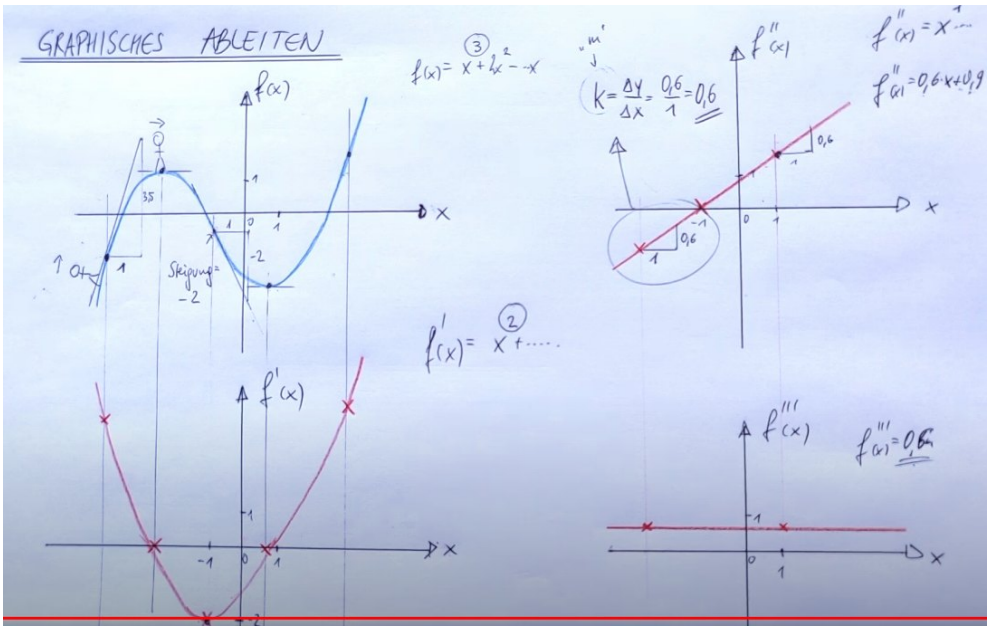
Merke:

Für die mathematischen Formeln bei allen Hörnern, aber speziell bei Salmon Hörnern, wo U = k² fix:

Für den ½ Öffnungswinkel eines Horns in Radiant oder in Grad und für die Berechnung der Hornfunktion mit sphärischen Wellenfronten eines (a) effektiven Radius oder (b) effektiver sphärischer Querschnittflächen muß strikt der Radius für die Steigung= F'(x) = dy/dx in Meter verwendet werden, Skala x ebenfalls in Meter. Wird der Radius bei plane Waves verwendet, so ist der einzige „Makel" die teils sehr kleinen Zahlenwerte.

*Für die Berechnung der Ableitungsfunktionen von F(x) und somit U, k, Fc könnte bei plane Waves anstelle des Radius bei der zentralen Differenzenrechnung auch der **Querschnittfaktor** des Horns als y = F(x) genommen werden. Referenzfaktor 1,0 ist der kleine Startquerschnitt (Radius od. Durchmesser), die Skala x sollte in Meter sein. F''(x) wäre dann zahlenmäßig größer als U, F'(x) kleiner als U, F(x) >=1; **U aber gleich!***

Diese Spitzfindigkeit ist zur Berechnung der Geometrie nicht bedeutend, aber für die richtige Hornfunktion U! Wird dies beachtet, so kommen keine falschen Werte für U, k, Fc und somit auch LF zustande!



Beispiel für ein überschlägiges graphisches Ableiten, die höhere Ordnung fällt mit jeder Ableitung um 1. (Youtube-Screenshot.)

Die sogenannte Kurvendiskussion:

Die geometrische Bedeutung der Ableitungen (sechs wichtige Regeln)

1. Ist $f'(x) > 0$ für $x \in [a;\ b]$, so ist f(x) dort **streng monoton steigend.**
2. Ist $f'(x) < 0$ für $x \in [a;\ b]$, so ist f(x) dort **streng monoton fallend.**
3. Gilt $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$ für eine Stelle $\xi \in D_f$, so hat f(x) bei ξ ein **lokales Minimum,** der zugehörige Graph einen **Tiefpunkt.**
4. Gilt $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$ für eine Stelle $\xi \in D_f$, so hat f(x) bei ξ ein **lokales Maximum,** der zugehörige Graph einen **Hochpunkt.**
5. Ist für $f''(\eta) = 0$ und $f'''(\eta) \neq 0$ für $\eta \in D_f$, so hat f(x) bei η einen **Wendepunkt.**
6. Ist f(x) in $x = a$ hinreichend oft differenzierbar mit $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$, so gilt:
   Ist n gerade, so hat f(x) bei $x = a$ ein **Extremum:** ein Maximum, wenn $f^{(n)}(a) < 0$ und ein Minimum, wenn $f^{(n)}(a) > 0$;
   ist n ungerade, so hat f(x) bei $x = a$ einen **Wendepunkt.**

Hörner im Detail:

Katenoid-Hörner:

Geometrie:

x = axiale Position
r0 = kleiner Radius bei x = 0 (in m)
r(x) = Radius bei axialer Position x
m = Steigung Querschnitt bei x in m ^-1 = 1 / h
r'(x) / r(x) = m

r (x) = r0 * coshyp (**x / h**)
r (x) = r0 * coshyp (x ***m**)
r''(x) / r(x) = m² = k² der cutoff Freq. = U

Katenoidhorn, m- bzw. h - Wert bestimmen anhand vorgegebenem Start- und End-Querschnitt:

coshyp (x) = (e^{x} + e^{-x}) /2 ; *Umkehrfunktion: g(x) = Ln [x + √ (x²-1)]*

m = { Ln [**(1/B)** + √ ((1/B²) -1)] } /L *1/B = Faktor großer zu kleiner Querschnitt*
L = Länge des Hornsegments in m

oder: h = 1 / { Ln [**(1/B)** + √ ((1/B)² -1)] / L } *oder Längenfaktor Horn zu Gesamtlänge in m*

Akustische Eigenschaften anhand der Hornform:

f = Frequenz in Hz (ganze Sinus-Schwingungen pro Sekunde)
c = normal Speed of Sound (~344 m/Sek) anhand Temperatur, Luftfeuchtigkeit, etc.
Fc = (untere) „cuttoff" Frequenz (-> durch k=m bestimmt): Fc = c / (2* pi * h)
h = Flare Konstante der Horngeometrie m = 1/h
durch (untere) cuttoff-Frequenz bestimmt: h = 1/ [(2*pi) / (c * Fc)]
U= Hornfaktor = fix = m^2 (mit m=Steigung Radius)
Tkat = Transmission Coefficient =1/ √ [1- (Fc / f)²]
LF = Längenfaktor = √ [1- (Fc / f)²]

LF = Faktor akust. eff kürzere Länge mit Frequenz oder höhere c' Phasengeschwindigkeit, daher:
c' = höhere Phasengeschwindigkeit in m /sek: c' = c / LF
eL CC eff. bzw. apparente Länge eL CC = (Länge+Endkorr.) * LF

Gegen closed Zyl.: Faktor Frequenz Erhöhung = 1/LF Cent Erhöhung = Log ((1/LF);2)*1200
(Es scheint hier die phys. Seitenlänge die bessere Wahl zu sein, wegen sphärischer Koordinaten, allerdings sind die tatsächlichen Abweichungen – wie auch beim Konus - oftmals sehr gering!)

Rechnet man die Resonanzfrequenzen anhand der Formel für einen einseitig geschlossenen Zylinder + Endkorrektur nach, und setzt die jeweils ermittelte geänderte Schallgeschwindigkeit c' ein, so erhält man wiederum die Resonanzfrequenzen des Horns. Das kann aber nur anhand einer „Lookup"-Tabelle für c' geschehen. Es braucht daher ev. „passende" Formeln für die Resonanzfrequenzen wie folgt:

Katenoidhorn - Resonanz-Frequenzen:

Morse Formel:

Resonanz-Frequenzen **closed-open**: F(n) =~ c / 4 Lp * √ { ***m***^2 + (2 Lp / pi * h)^2 **+0** }

wobei Lp = Seitenlänge mit Endkorr. ***m = (n*2)-1 ..-> = 1,3,5,7..)***

Rossing/Fletcher:

Nulldurchgänge der jeweils aufsteigendenTangente = Resonanzen anhand der transzendenten Formel:

[0] - [(***b***/***k***) * 1/(TAN(b*L))] - [0] *mit b= √ (k^2 - m^2), m=Flarefaktor Radius*

Exponential-Hörner:

Geometrie:

x = axiale Position
r0 = kleiner Radius bei x = 0
r(x) = Radius bei axialer Position x
m = 1 / h, Steigung Radius in m ^-1

r = Radius bei axialer Position x r (x) = r0 * exp (**x / h**) = r0 * Eulersche Zahl^ (x/h)
m = 1 / h r (x) = r0 * exp (x ***m**) = r0 * Eulersche Zahl^ (x*m)
r'(x) / r(x) = m r''(x) / r(x) = m² =k² der Cutoff Freq. = U

Exponentialhorn, h-Wert bestimmen anhand vorgegebenem Start- und End-Querschnitt:

mit 1/B = Faktor großer zu kleiner Radius, Umkehrfunktion: Ln() = natürlicher Logarithmus *(Ln aus 0 =1,0)*

m = [Ln (1/B)] / L *mit L= Länge des Horns oder Hornsegments in m,*
oder: h = 1 / { [Ln (1/B)] / L } *oder Längenfaktor Hornanteil zu einer Gesamtlänge in m*

Akustische Eigenschaften anhand der Hornform:

f = Frequenz in Hz (ganze Sinus-Schwingungen pro Sekunde)
c = normal Speed of Sound (~343m/sek) anhand Temperatur, Luftfeuchtigkeit, etc.
Fc = (untere) „cuttoff" Frequenz (-> durch k=m bestimmt): Fc = c / (2* pi * h)
h = Flare Konstante der Horngeometrie m = 1 / h
durch (untere) cuttoff-Frequenz bestimmt: h = 1/ [(2*pi) / (c * Fc)]
U= Hornfaktor =fix = m ^2 (mit m=Steigung Radius)
texp = Transmission Coefficient: = √ [1- (Fc / f)²]
LF = Längenfaktor ~ = [1- (Fc / f)²]

LF = Faktor akust. eff kürzere Länge mit Frequenz oder höhere Phasengeschwindigkeit c', daher:
c' = höhere Phasengeschwindigkeit in m /sek: c' = c / LF
eL CC eff. bzw. apparente Länge eL CC = (Länge+Endkorr.) * LF

Gegen closed Zyl.: Faktor Frequenz Erhöhung = 1/LF Cent Erhöhung = Log ((1/LF);2)*1200

Exponentialhorn - Resonanz-Frequenzen **closed-open**:

Grundsätzlich gilt gegenüber einem Katenoidhorn mit selbem Start- und Enddurchesser sowie Hornlänge = kleinerer Flare m und tiefere Cutoff-Frequenz beim Exponentialhorn:

Mit Ausnahme der 1. Frequenz liegen alle Resonanzen geringfügig höher als beim Katenoidhorn, obwohl diese ein wesentlich anderes äußeres Erscheinungsbild haben!

Morse Formel:

Morse gibt eine Formel an, aber diese liefert allerdings völlig abweichende Ergebnisse anhand der Annahme, daß der Transmission Coefficient gleich dem Längenfaktor eines closed Cylinder wäre.

Abgewandelte, korrigierte Formel:
Resonanz-Frequenzen **closed-open**: F(n) =~ c / 4 Lp * √ { ***m***^2 + (2 Lp / pi * h)^2 [**+1**] }
m = (n*2)-1 ..-> = 1,3,5,7..) ***mit letztem Term +1 anstelle Morse: + (8Lp) / (pi^2*h)***

Rossing/Fletcher:

Nulldurchgänge der jeweils aufsteigendenTangente = Resonanzen anhand der transzendenten Formel:
(liefert bei kurzen Hörnern bzw. hoher Steigung etwas zu hohe Resonanzen der unteren Modes)

[0] - [(*b*/***k***) * 1/(TAN(b*L))] - [m/***k***] *mit b= √ (k^2 - m^2) m=Flarefaktor Radius*
der Term [m/k] bestimmt die höhere Phasengeschwindigkeiten gegenüber dem Katenoidhorn.

Konisches Frustum – Berechnungen:

Formeln:	mit Beispieldaten:
r0 =kleiner Radius bei x=0	5mm
x = Seitenlänge Frustum	1000mm
großer Radius bei x	20mm
r0/rx = Differenzen Quotient, Steigung, B-Faktor	0,25
dy = rx – r0 Radius Differenz	15 mm
dx = Differenz Seitenlänge	1000mm
dy / dx = Differentialquotient, da lineare Funktion	0,015 Steigung/ mm Länge
tangens (dy/dx) = Halbwinkel Spitze in Radiant	0,015001125 Rad = 0,859 Grad
x0 = r0 / (dy/dx) = Länge der fehlenden Spitze	333,333 mm Seitenlänge
x0 = Radius klein / [(Radius groß – Radius klein) / Länge Frustum]	
x + x0 = r2 Seitenlänge inkl. fehlender Spitze	1333,333 mm
x0 / r2 = B-Faktor so errechnet	0,25 1/B = 4,0 facher Enddurchmesser

Frustum: 1-Parameter Horn mit sphärischen Wellenfronten - korrekt:

r2 – h = r2 * cos (Halbwinkel)	1333,333 * 0,9998875 = 1333,18336 =Länge Kegel
h = r2 * (1-cos (Halbwinkel))	1333,333 * 0,0001125 = 0,15 mm =Diff. r2-h
Fläche S einer Sphäre = 2 * pi * r * h	1256,8 mm2
W = Raumwinkel einer sphärischen Fläche (Kugel)	S / (Kugelradius²) = solid Angle = 0,0007
	=2pi * (1- cos (Halbwinkel Kegel W))
Fläche der sphärische Wellenfront S bei r2 = W*(r2)²	1256,8 mm2 S at x = W * (x+x0)²

Frustum: 1-Paramenter Horn mit ebenen Wellenfronten – Annäherung mit geringer Abweichung:

Radius at x	=	Radius klein r0 + (x* (dy/dx)) bzw. auch r0*(1+(x/x0)
Radius at x	=	Radius klein r0 * ((x+x0) / x0)
Querschnittfläche at x pi * r0²	=	Fläche klein * ((x+x0) / x0)²
at x= 0 mm	=	78,539 mm2
at x= 1000mm	=	1256,6 mm2 = 16,0 fach = (1/B)^2
z = x-h = Länge Frustum = x-0,15mm	=	999,85 mm -> -0,15mm Diff. über 1333,33 mm r2

Es gibt hier nur eine kleinste Differenz anhand der nur geringen Steigungen (Öffnungswinkel 0,859 Grad). Für diese Zwecke vernachlässigbar ist die x-h als x-Achse immer minimal geringer, detto die Plane Wave Querschnittfläche und somit sind Berechnungen anhand „nur" plane wave" Approximation durchaus gültig!

Frustum closed-open, Transmission Coefficient: tc= 1 / [1+ (WL /2 pi x0)^2] *kein Cutoff = 0 Hz*
tc=0,5 wo x0/WL= 1/(2*pi) *je größer Steigung desto höhere Freq., mit tc=0,5*
bzw. wo Frequenz = [c* (rx-r0)] /(2 pi L b) *je „zylindrischer", desto tiefer liegt Freq. mit tc=0,5*
r''(x) / r (x) = U = 0 = keine untere cutoff Frequenz

Frustum closed-open, Druckverlauf:
Druck p(r) = abs ({sin [k * (r2-r)] } / r) Werte sind in Radiant (Bogenmaß).
r2-r = Gesamtlänge inkl. fehlender Spitze = aktuelle Position von der fehlenden Spitze entfernt
anstelle r-r1 beim offenen Frustrum (r = Position ab fehlender Spitze, r1= Pos. kleines offenes Ende
Das Ergebnis der Hüllkurve 1/r ist allerdings das selbe.

Resonanzfrequenzen *(Endkorrekturen: physische Länge muß entspr. gekürzt werden):*
*tan (k*Lp) = -k * r1 gibt:* **tan (pi* f/f0) = - (B / (1-B) * (pi*f/f0)**
mit f0 = c/ (2*Lp) = Grundton offener Zylinder (oder Konus mit Spitze) mit selber Länge L = r2-r1 =Lp1,0
w = 2*pi*f oder 2*pi/Periode und daraus k = w / c Lp=mit Endkorrektur.
Die Lösung ist eine sogenannte transzendente Gleichung. (Graphische Lösung von 2 Kurven)
Die Schnittpunkte zur aufsteigenden Tangentenkurve ergeben die resultierenden Resonanzfrequenzen.
Konus mit vollständiger Spitze B=0 (Limit):
Nulldurchgänge bei n = 1,2,3,4,5, usw sind die Resonanzfrequenzen
wobei n = 1,2,3,4 ist immer ein exakt harmonisch Vielfaches von pi; 1*pi, 2*pi, 3*pi, usw.
Einseitig geschlossener Zylinder B=1,0 (Limit):
Minuspolstellen bei N= 0,5 1,5 2,5 usw. sind die Resonanzfrequenzen, wobei n = 1*pi/2 3*pi/2 5*pi/2 usw.
d.h. ungeradzahlige Vielfache

Resonanzfrequenzen Alternative: = aufsteigende Nulldurchgänge bei 0- {1 / (tan (k*Lp) } - [1/ (k*x0)]

Hyperbolic cosine (Salmon Horn mit T 0<>1)

$$\begin{aligned} R(x) &= a\cosh\alpha(x-x_1)+b\sinh\alpha(x-x_1), \\ &= B\cosh[\alpha(x-x_1)+\phi], \\ R'/R &= \alpha\tanh[\alpha(x-x_1)+\phi], \\ R''/R &= \alpha^2; \end{aligned}$$

where $B=\sqrt{a^2-b^2}$, $a^2>b^2$, $\tanh\phi=b/a$, $a=B\cosh\phi$, $b=B\sinh\phi$.

Hyperbolic sine Waveguide (T>1):

$$\begin{aligned} R(x) &= a\cosh\alpha(x-x_1)+b\sinh\alpha(x-x_1), \\ &= B\sinh[\alpha(x-x_1)+\phi], \\ R'/R &= \alpha\coth[\alpha(x-x_1)+\phi], \\ R''/R &= \alpha^2; \end{aligned}$$

where $B=\sqrt{b^2-a^2}$, $b^2>a^2$, $\tanh\phi=a/b$, $a=B\sinh\phi$, $b=B\cosh\phi$.

Weitere Formeln für einfachere Geometrien, der Vollständigkeit halber:

wobei: c = Schallgeschwindigkeit im freien Raum in m/Sek. =c0, da nicht frequenzabhängig, nicht dispersiv.
Lp = Seitenlänge inkl. Endkorrektur, x = Entfernung von einer ev. nicht vorhandenen Spitze (nicht Radius)

Konus mit geschlossener Spitze, Druck und Resonanzfrequenzen:
Druck p(x) = (1/x) * [Abs sin { 2n * π (x/2*Länge)] } Werte sind in Radiant (Bogenmaß).
Resonanzfrequenzen f(n) = n*c / 2*Lp mit n = Mode #

Frustum open-open (offener Konus mit fehlender Spitze):
Druck p(x) = abs ({sin [*k*n (x-x1)] } / x) Werte sind in Radiant (Bogenmaß).
Resonanzfreq. (n) = nc/2Lp = nc / (2* (x2-x1)) = *k*n*c/2*pi wobei L 1,0 = Seitenlänge Frustum =x2-x1
Flankenwinkel verändert die Druckverhältnisse -> Resonanzfrequenzen + Druckknoten sind nicht geändert!

Zylindrische Rohre beidseitig offen, äquivalente Längen:
Resonanzfrequ. *n* Open Cyl. = c * n / (2 * eq Länge) *auch Konus mit Spitze, hier 1 x Endkorr.*
Equiv. L open Cyl. = c * n / (2 * Res. Freq) *ermittelt=inkl. 2x Endkorrekturen*

Zylindrische Rohre einseitig geschlossen, äquivalente Längen:
Resonanzfrequ. *n* Closed Cyl. = c' * [(2n)-1] / (4 * eq Länge)
Equiv. L Closed Cyl. = c' * [(2n) -1] / (4 * Res. Freq.) *(ermittelt=inkl. 1x Endkorrektur)*
- phys. Länge zuzüglich Endkorr. open End
= Equiv. Längenänderung mit Frequenz *(MPC + Mundrohr + Tube oder z.B. Tube + Bell)*

Länge cl. Zyl. für harmonische Reihe = (L CC +Endkorr) * ([(2n)-1] / (2n)) *= Verhältnisse 1:2; 3:4; 5:6;*
Akustisch notwendige wirksame Änderung **l '** = L open pipe* (1/(2*n))

Endkorrektur pro offenem Ende anhand (größerem) Radius a **= (tiefere) effektive Grundstimmung**
Bei einem offenen Loch (in einer großen Wand): L + 8*Radius / 3* Pi() = Radius a* 0,8488 (Morse)
Bei einem offenen Rohrende ohne „Flange": *k*a=0 L + = Radius a* 0,6133 Levine et. al.
Diese notwendige Endkorrektur bei *k*a=1 fällt mit steig. Frequenz über ~0,52 bei *k*a =2, weiter auf ~0,43

Mundstück / Helmholtz-Resonator, Länge äquivalenter closed Cylinder
Länge eines equ. cl. Cyl. at very low Freq. = Total **Volumen** Resonator / Querschnitts-**Fläche** Zyl.
Länge eines equ. cl. Cyl. at MPC Popp Freq. = Speed c / (4 * MPC Popp. Freq.) *=1st Mode cl Cyl.*

Viskothermale Verluste in einem Resonator:

Verhalten sich als Faktor e^-ax, a = √ (A*f)
Druckpotential nimmt mit Entfernung x ab,
Verluste steigen mit der Quadratwurzel der Frequenz.
dies führt zu einer verminderten Amplitude (A)
in der Input Impedanzkurve, je höher die Freqenzen liegen.
in einer logarithmischen Ansicht am besten erkennbar.

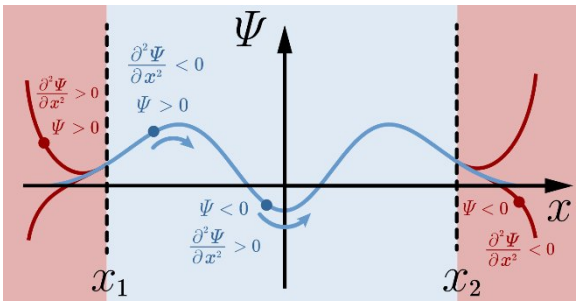
Die Gesamtabschwächung der Input-Impedanz-Hüllkurven
ist die **Summe aus Abstrahlungs- u. viskothermalen Verlusten.**

Die „Webster Horngleichung“ – ein Annäherungsversuch:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{1}{c_o^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

mit: S = Querschnittfläche, x = axiale Distanz, p = Druck, t=Zeit
c0 = Schallgeschwindigkeit in m/Sek. in Luft und freier Umgebung

Die Wellenfunktion Ψ = Psi aus der Quantenmechanik:



Beispiel für eine Wellenfunktion, die in einen klassisch verbotenen Bereich (rot) eindringt. Während die Wellenfunktion im klassisch erlaubten Bereich (blau) zwischen x_1 und x_2 oszilliert, geht sie im verbotenen Bereich gegen positiv oder negativ unendlich. Für bestimmte Gesamtenergien W des Teilchens, fällt die Wellenfunktion exponentiell ab. Diese Eigenschaft der Wellenfunktion ermöglicht den quantenmechanischen Tunneleffekt.

Im klassisch erlaubten Bereich zwischen x_1 und x_2 sind am Ort x die Vorzeichen der Wellenfunktion $\Psi(x)$ und der Krümmung $\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}$ (zweite Ortsableitung der Wellenfunktion) entgegengesetzt. Dieses Verhalten führt zur Oszillation der Wellenfunktion im klassisch erlaubten Bereich. Im klassisch verbotenen Bereich haben die Wellenfunktion und ihre Krümmung stets das gleiche Vorzeichen (beide positiv oder beide negativ am Ort x).

Ebene Wellenfront Annäherung = 1 dimensionale plane wave approximation:

Mit der Annahme, daß sich der Druck entgegengesetzt proportional zur durchströhmten Fläche verhält, und einer Substitution von p = Druckpotential nach Wellenfunktion Potential Ψ = **p* [√ S]**
kann diese Gleichung in die sogenannte „Schrödingerform“ (aus der Quantenmechanik) überführt werden.
Psi Ψ = nun normalisiertes Druckpotential
Psi Ψ = nun die Wellenfunktion, x = axiale Distanz, w= Winkelgeschwindigkeit = Frequ. * 2 * Pi = in Radiant/Sek., c0 = Schallgeschwindigkeit in m/Sek. in freier Umgebung, a = Radius (in m).

A + ([B - C] * D) = 0

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\left[\left(\frac{\omega}{c_o}\right)^2-\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right]\psi=0$$

Die allgemeine Form, Term A, B und D sind quasi Konstanten,
Term C ist variabel
und entspricht der **Hornfunktion U = k²**.

Term A ist die 2. Ableitung der Wellenfunktion Ψ = Änderung der Steigung der Wellenfunktion
Term D ist die 1. Ableitung bzw. f ’(x) = Ψ = p* Wurzel aus der Qerschnittsfläche bei x,
dh. Ψ (Psi) ist bei einem sich ständig erweiternden Horn >0 sowie stetig und steigend.

Term B beschreibt die Winkelgeschwindigkeit in Radiant zum Quadrat =*k²* (steigt mit Freq. sehr rasant an)

*w = Freqenz * pi * 2*	*=Radiant pro Sekunde*	*c0= Meter/Sekunde*	*(w/c0) = k einer Cutoff Frequ. >0 Hz*
k	*=Radiant pro Meter*	*m/sek. = c0*	*k= 2*pi wenn m/sek = c0*

Term C ist [Radius reziprok * 2. Ableitung f’’(x)]	1/a * F’’(x)	**= f’’(x) / f(x) = U**
generell anhand des Radius R der äußeren Kurvatur	**= 1/ (a*R)**	= nur eine Umformung!
diese ist bei Zylinder, Konus und Frustum	0 fix	
bei Exponential-, Hypex- u. Katenoidhorn	m² =k² = fix²	
bei Besselhorn	[m*(m+1)] / x²	(plane Wave Approx.)

Term B und C werden zusammengefasst und mit Ψ multipliziert: Term A + [(Term B-C) * Ψ] = 0

Definition f''(x):
[d²a / dx²] = 2. Ableitung f''(x) = Änderung der Steigung, m=f'(x) = Steigung des Radius a

Definition Hornfunktion U, ebene Wellen:
1/a * [d²a / dx²] = f''(x) / f(x) = U=k² 1/a wird mit zunehm. Radius kleiner * **größere Krümmung = k²**

Zylindrische und linear konische Resonatoren / Waveguides:

(1/a) * [d²a / dx²] = 0 gibt eine nicht dispersive Phasengeschwindigkeit c' = c0, keine Cutoff Frequenz
= f''(x) / f(x) = U

$$\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}=0$$

Bei einem Zylinder oder linearem Konus ist die 2. Ableitung
= Krümmung der Steigung gegen eine Gerade gleich 0.
*1/a * 0 = 0 -> Term C entfällt, Hornfunktion U=0*

Exponential und Katenoidhörner, hyperbolische Hörner der Salmonhorn-Familie:

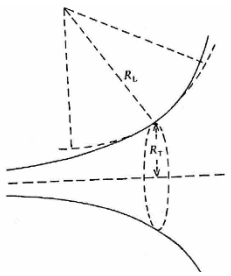
(1/a) * [d²a / dx²] = m² =konstant w*c = c0*m = fc = c0 * m / (2*pi)
f''(x) / f(x) = m² = U (w/c0)² = k² = U, k²-m²=0 bei fc.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\left(\left(\frac{\omega}{c_o}\right)^2-m^2\right)\psi=0$$

Term C bei Exponentialhorn bis zu Katenoidhorn (Hypex-Hörner):
Hornfunktion U = m² wobei (w/c0)² = k² cutoff = m²
*m = Steigung Radius, m*2 = wäre Steigung Flächenquerschnitt.*

Schallbecher in der Praxis - empirisch geformte Hornkonturen:

Hörner kann man alternativ auch anhand eines fiktiven Radius der longitudinalen Hornkontur = **RL**
bei Position x beschreiben, wobei dies aber nur eine Umformung der Ableitungen ist, (Kehrwerte) :



$$R=\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right)^{-1}$$

R = (RL) Radius einer äußeren Kurvatur am Punkt x, zu RT = a = Radius
ergibt sich aus folgendem Zusammenhang: RL=longitudinal, RT=transvers

Der Radius der Kurvatur der Hornkontur = **RL** wäre an jedem Punkt x:
RL = 1/ [d²a / dx²] = Reziprokwert der 2. Ableitung,
1/a = 1/F(x) = Reziprokwert der Funktion (x)
Hornfunktion U = **k² = 1/ (a*RL) = (1/a) * F''(x) = f''(x) / f(x)**
daraus ergibt sich k = Kreiswellenzahl der Cutoff Freq. bei Position x
k= √ 1/(a*RL) fc = (c*k) / (2*π) **fc = (c/ (2* π)) * √ (U)**

$$\omega > \omega_c = c_o/(aR)^{1/2}$$

w = Kreisfrequenz = 2*pi*f = Radiant / Sekunde
wenn f > f cutoff, dann erfolgt nur noch Abstrahlung ohne Reflektion
wc = w cutoff = c0 / √ (a * RL)
fc = f cutoff = [c0 / √ (a * RL)] / (2*pi)

Besselhörner, mit Flareparameter m > 0:

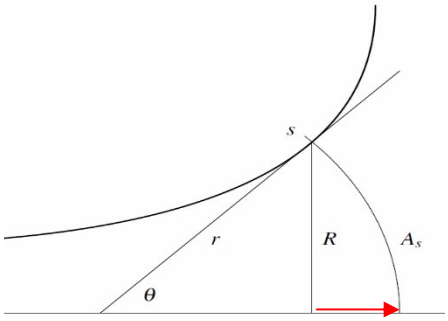
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\left(\left(\frac{\omega}{c_o}\right)^2-\frac{m(m+1)}{x^2}\right)\psi=0$$

Term C bei Besselhörnern, m = Flarefaktor Bessel für Radius
wobei dies hier nur die Formel für ebene Wellefronten ist,
f'(x) / f(x) = U(x)

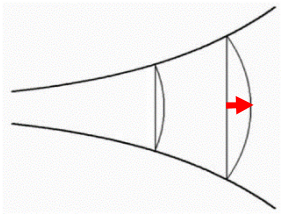
Koordinaten beim Besselhorn:
Startet man mit kleinem Radius wie bei den anderen Hörner (links), dann ist x bei 0=L+y0; xL=y0; xL+y0=0!

Sphärische Wellenfronten und Querschnittflächen:

Plane Wavefront Berechnungen liefern eine immer höher werdende Hornfunktion. Es würde defakto alles (hohe Frequenzen) reflektiert, kein Cut-off Bereich wie er aber existiert. Eine bessere Annäherung ergibt sich unter Annahme spährisch gewölbter Wellenfronten, wie sie im Konus tatsächlich ausgeprägt sein müssen.



x,z=0 M <-- L --> x z
<----------r = x + h----->
Schnitt durch ein Hornprofil (Schallbecherende)



Skizze Qerschnitte ebene vs. gekrümmt;
sphärische Querschnittsflächen sind größer,
liegen 90 Grad zur Hornwandung s (bei x),
und die equiv. Bogenlänge ist ebenfalls größer.

y = Radius Achse (aufwärts, Skala nicht angezeigt)
x = Achse für ebene Wellen
R(x) = Radius bei ebenen Wellen RT=transversal
Φ = Winkel der Steigung = arctan [F'(x)] in Rad
h = Radius Kugel r * (1-cos (Φ))

s = Slope bzw. Hornkontur =F(x)
z = Achse für die sphärischen Wellen-**Fronten**
r = Radius Sphäre (Kugelabschnitt)
M = Sphärenmitte, Kugelmitte, anhand Steigung
bei AS = Bogenlänge, Fläche der result. Sphäre

Bei langen, rein konischen Resonatoren, wie solche bei Blechblasinstrumenten vorkommen können, (z. B. Alphorn), sind die in Frage kommenden Steigungen (Öffnungswinkel) gering. Die Seitenlänge (Konturlänge) ist nur minimal länger als die x-Achse. Die Differenz h von Konturlänge samt nicht vorhandener Spitze = s zur X-Achse; mit h = s * (1-cos (Winkel Φ)) ist gleichzeitig der Abstand h=z-x, um welchen sphärische Wellenfronten max. voraus eilen bzw. gewölbt sind. Ist h=0, bei Zylindern mit Steigung 0, so sind sie eben.

Die 1. Ableitung F'(x) = dy/dx einer Differentialrechnung mit F(x) = Hornradius gibt die Tangentensteigung gegen eine Gerade =tan(Φ). Wird diese Tangente bei s(x) angelegt und fortgesetzt, schneidet sie am Sphärenmittelpunkt M die x- und (selbe) z-Achse. Es ergibt sich ein Steigungsdreieck mit den Punkten x, s bei x und M. Gesucht ist die Länge L von M nach x: L = x-M und die Länge r, der Radius der Sphäre

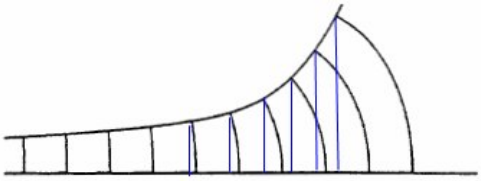
Formeln rechtwinkeliges Dreieck bzw. Kegel:
Steigung tanΦ = R / L und umgeformt: L = R / Steigung tan Φ
F'(x) = R(x) / L bzw. L = R / F'(x) F'(x) = tan(Φ) L= x-M = R(x) / F'(x)

Anhand Pythagoras kann nun die fehlende Länge r ermittelt werden: $L^2 + R^2 = r^2$
und somit Wurzel aus r^2 = r Länge ->jetzt auch Radius der Sphäre, wobei M + L = x und M + r = z.
Arctan(F'(x) liefert den halben Öffnungswinkel Φ des Horns bei x im Bogenmaß Radiant.

Berechnung der resultierenden Wellenfront des Kugelabschnittes S:
Der gesamte Umfang einer Kugel (Sphäre) beträgt: r * 2pi 360°= 2 *pi = 6,28..rad
Die Bogenlänge der sphärischen Front ist der angenommene „effektive Radius" unter Annahme spährischer Wellenfronten bei x und beträgt aS= **r(x)*Φ** wobei 90°= 0,5*pi = 1,57..rad **(Limit)**

Die akustisch relevanten Querschnittflächen der Wellenfronten ergeben sich mit:
planar: A(x) = 1 * pi * (R^2) Kreis - Querschnittsfläche
sphärisch: AS(x) = 2 * pi * (r^2) * (1- cos (Φ)) Kugelflächenabschnitt mit führender Front bei z(x).
= 2 * pi * r * h

Die Flächenfunktion in der Webster Horngleichung wird modifiziert, in dem anstelle der planaren Fläche A(x) die sphärische Fläche AS(x) mit leading Part bei z verwendet wird, bzw. ein effektiver Radius **aS** bei x=r*Φ.



blau symbolisiert = x-Positionen, links durch z-Positionen (schwarz) überlagert, die an der x-Achse beginnen „vorauszueilen“. Sphärische Radien verringern die effektive Krümmung der Steigung und führen so zu einem „Wendepunkt“ and der Stelle x mit der höchsten Hornfunktion = k² (sphärische Flächen noch stärker)

Hinweis: Berechnungen anhand eines „effektiven“ sphärischen Radius ergeben höhere U-Werte = höhere Cut-off Frequenz als die Berechnungen mit einer angenommenen „effektiven“ spährischen Fläche!

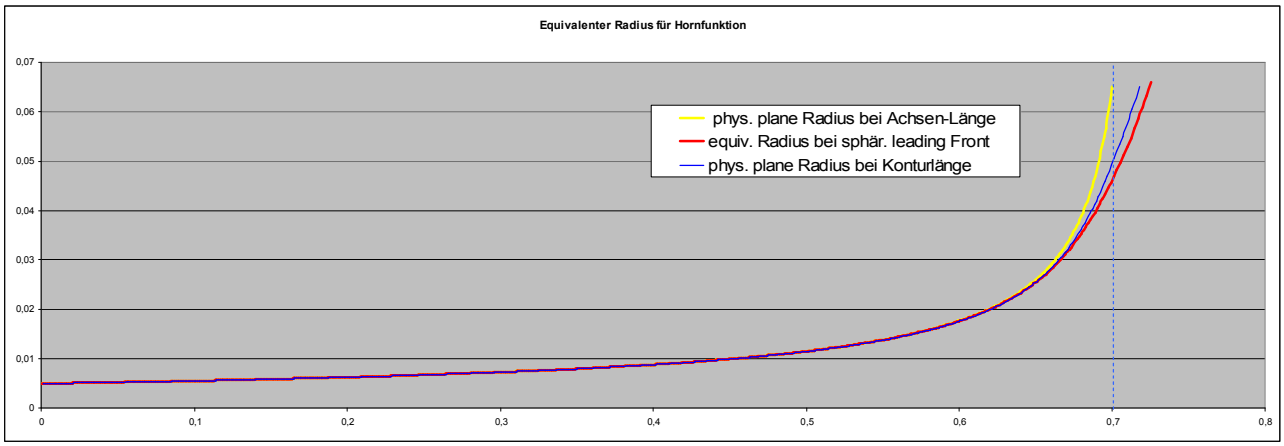
Sphärische Koordinaten und Werte sind jeweils für den Messpunkt an der x-Achse, der ansonsten für die plane wave Berechnung verwendet wird. Hier haben die Kreisbögen einen 90° Winkel zur Hornwandung.

Die Werte in der Horngleichung werden für die sphärischen Modelle wie folgt abgeändert, für Position x gilt:

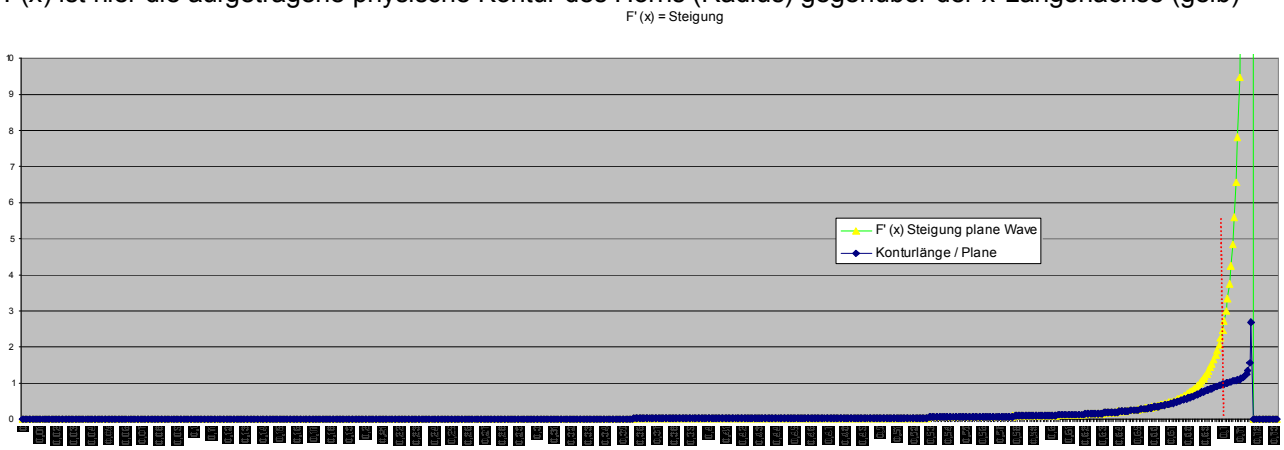
-> **(1/r) * [d²r / dz²]** r = eff. Radius mit leading Pos. bei z m=f’(z) = Steigung des Radius r
= **f’’(z) / f(z) = U(z)** **bei Position x.**

-> [dS / dz] = 1. Ableitung = Steigung der Flächenvergrößerung, m=f’(z) = Steigung der Fläche S
-> [d²S / dz²] = 2. Ableitung f’’(z) = Änderung der Steigung (Sphäre)
= f’’(z) / f(z) = U(z) **bei Position x.**

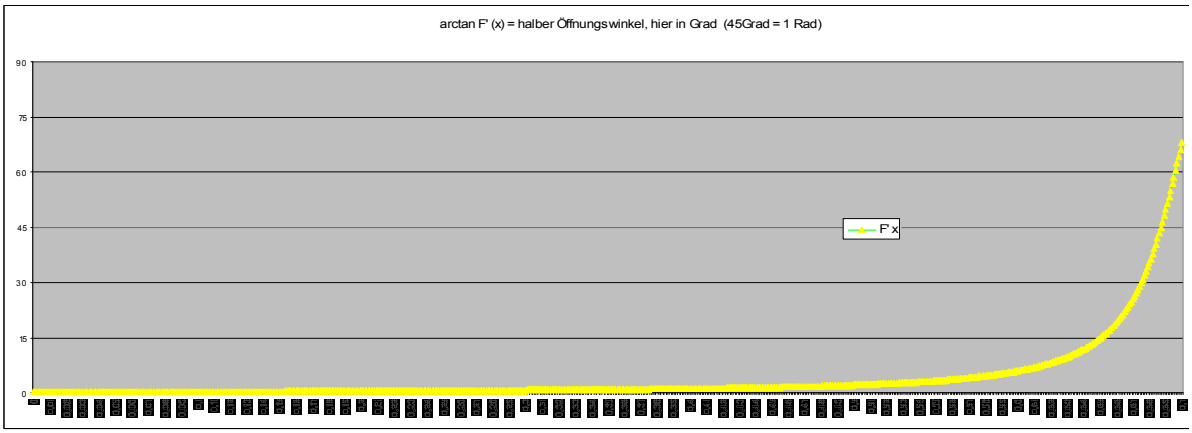
Beispiel-Berechnung mit ~ in etwa Bb-Trompeten Dimensionen:



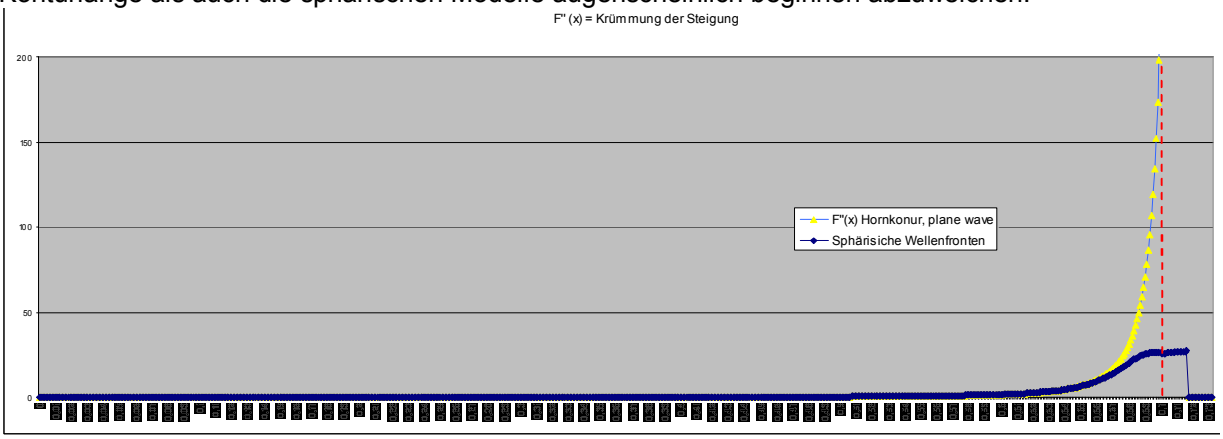
Ein Schallbecher (hier ein Bessel Horn mit Flare 0,7) Länge 0,7m Startradius = 0,005 m Endradius 0,065m F(x) ist hier die aufgetragene physische Kontur des Horns (Radius) gegenüber der x-Längenachse (gelb)



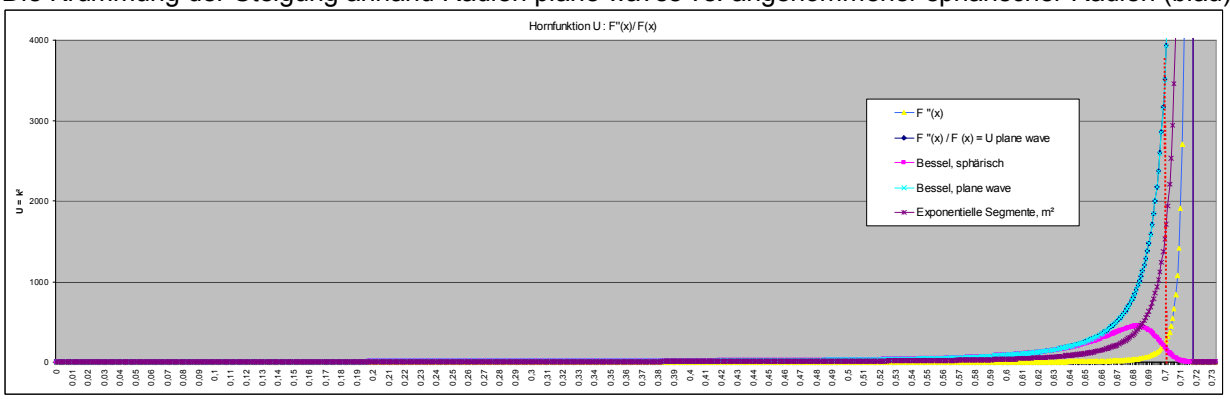
Steigung F’(x) - mit zentr. Differenzenformel ermittelt h = jeweils 1mm, gelb: anhand x-Achse, blau: anhand Konturlänge. Die Konturlänge beträgt hier 0,7182m, d.h. „nur“ ~18 mm mehr als die x-Achsenlänge. (+2,6%)



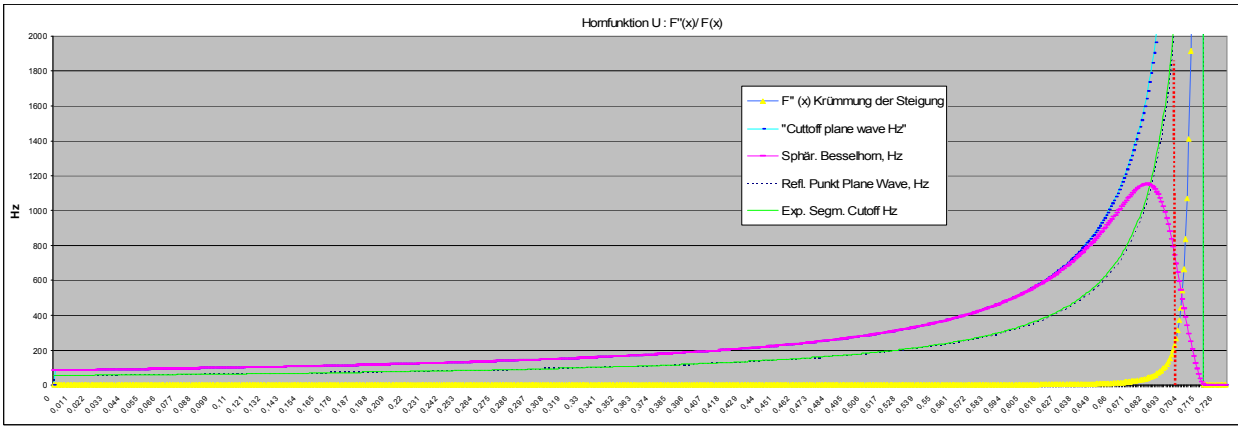
Horn, ½ Öffnungswinkel in Grad. Am Becherende bei 0,7m beträgt der finale Winkel hier 68 Grad.
45 Grad liegen hier bei 0,6875m, 30 Grad bei 0,676m. Hier wird in etwa der Bereich erreicht, an welchem die Konturlänge als auch die sphärischen Modelle augenscheinlich beginnen abzuweichen.



Die Krümmung der Steigung anhand Radien plane waves vs. angenommener sphärischer Radien (blau)

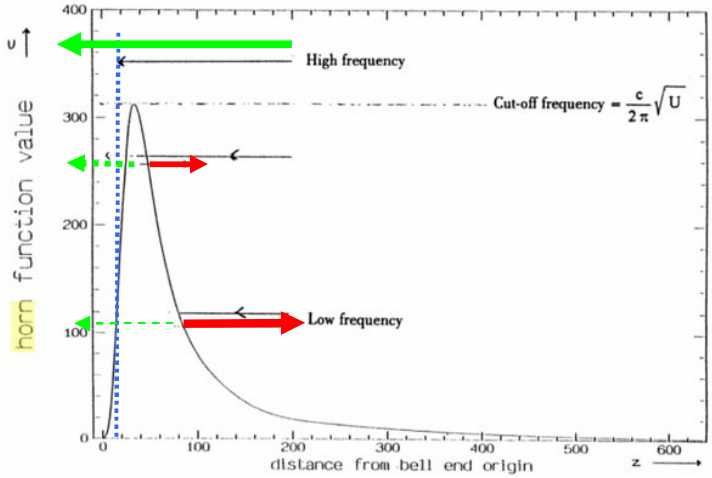


Berechnete Hornfunktion, Bessel-Formel anhand sphärischer Fläche vs. div. plane wave Berechnungen.



Hier mit Hz- Skala, Unterschiede in der Berechnung bei diesem Becher oberhalb ca. 800 Hz, die ermittelte Cutoff-Frequenz mit sphärischen Flächen liegt hier bei 1152 Hz (mit c0=344 m/sek) und U-Peak bei 0,6827m

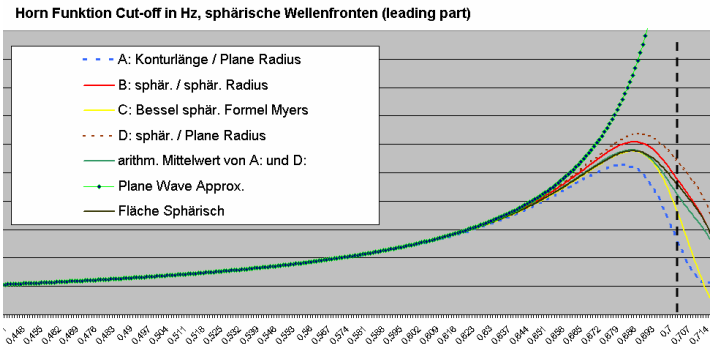
Tunnel-Effekt / Potential-Barriere von Schallbechern:

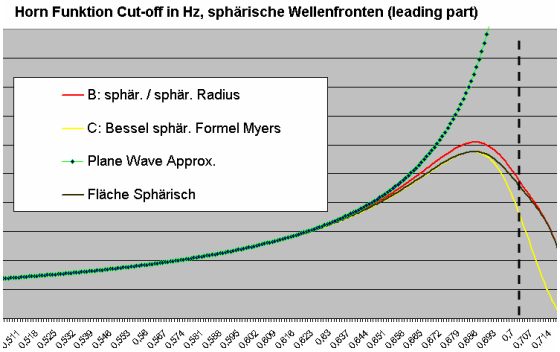


z=0 Trichterende----> Mundstück-Ende (closed)
Hornbarriere, Cut-off Frequenz und Tunneleffekte unter Annahme sphärischer Wellenfronten der Flächen.
Cut-off Frequenz = (c0 / 2*pi) * √ U *(hier ~ 980 Hz ... vermutlich die Dimensionen einer Posaune)*
√ U = *k* = Kreiswellenfrequenz bei Cutoff = ω/c = (2*pi* f) / c0 = 2 * pi / Wellenlänge λ

z0=**besser** als „**z Infinity**" bezeichnet liegt außerhalb des Schallbechers, die Steigung wäre unendlich=90°
z=y0 = das phys. Schallbecherende, mit der Annahme, daß alle Wellenfronten sphärisch (gewölbt) wären, d. h. immer mit 90° Winkel zur Wandung. Teilton-Frequenzen oberhalb der Cut-off Frequenz (High Freq.) werden nicht mehr reflektiert (rot skizziert), sondern nur noch abgestrahlt (grün) = Megaphone-Effekt.

(Teilton-) Frequenzen unterhalb der Cut-off Frequenz (notwendig für die Bildung stehender Wellen) werden umso stärker zurückreflektiert, je „breiter und niedriger" die Barriere ist. Durch den Tunneleffekt wandern nur geringere Anteile solcher Frequenzen (grün) durch die frequenzabhängige „breitere" Potentialbarriere.





Sphärische Flächenmodelle prognostizieren niedrigere Cutoff Frequenzen (1152 Hz vs. 1219 Hz mit Radius)
Die hornseitige Flanke, der U-Wert, als auch die Peak Position stimmen bei sphär. Flächenannäherung gut!
Wichtig ist bei allen Annäherungen, daß die Segmente (h) spez. am Ende des Schallbechers sehr kurz sind!

Besselhörner - Berechnung Geometrie:

r(x) = r0 * x^-m bzw. A(x) = A0 * x^-(2m) mit r=Radius, m=Flarefaktor des Radius, A(x)=Fläche
Hierzu kursieren viele kryptische Formeln. Nach langer Suche habe ich folgende Lösungen gefunden; für die Berechnung der Geometrie von **endlich** langen Besselhörnern sind folgende 4 Konstanten erforderlich:

Meine Formel (Variante A) mit Ausgangspunkt: -> **das große Ende mit r0 ist bei x=0**

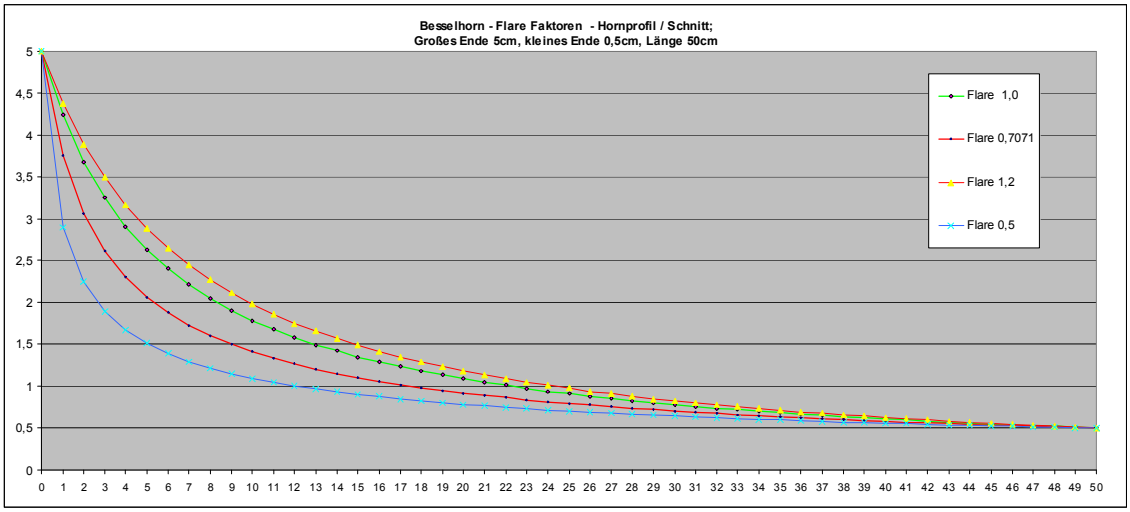
Bessel-Flarefaktor „m"	der Anwendung finden soll
großer Radius r0 bei x=0	Referenz-Durchmesser (großes offenes Ende x=0)
kleiner Radius rL bei x*L=Entfernung	(kleinerer) Referenz-Durchmesser, z.B. kleines Ende bei x=L
Hornlänge x-Achse=L	Entfernung kleines Ende vom großen Ende (x=0) (positive Zahl)

Aus diesen Angaben kann an jeder Stelle x (Entfernung) der resultierende Querschnitt ermittelt werden.
Hinweis: Eine Position „x=0+K" liegt außerhalb des großen Endes: Hier erreicht der Querschnitt „Infinity"!
Auch x> Entfernung der beiden Radien sind möglich, aber x<x0+K = >Infinity (90 Grad Flankenwinkel) nicht.

Daraus ergeben sich wiederum 2 Konstanten für die weitere Berechnungen der Geometrie:

Faktor h= Faktor Radius klein zu groß = rL/r0
Konstante **K** aus Radien und Hornlänge = Hornlänge / { 1- [Faktor h ^-(1/Flarefaktor)] } (K=ein Minuswert)

Radius r bei +Entfernung x vom großen End-Radius r0 bei x=0: und y0=0-K
= großer End-Radius r0 * { [1- (Entfernung/ Konstante K)] ^-Flarefaktor m }



1.: Der Flare-Faktor bestimmt die Gestalt des Horns = wie langsam es sich im Querschnitt --> **verringert!**

Flare Faktor ~+0,0001 = Einseitig geschlossener Zylinder (mit einem „Baffle"; K= gegen -Null)
Flare Faktoren +0,6-0,7 entsprechen ~ „sehr engen bis medium" Bb-Trompeten Schallbecher-Mensuren
Flare Faktor +0,7071 = Resonanzfrequenzen Geom. Mitte zwischen closed Zyl. und Konus mit Spitze
Flare Faktoren ~0,8 ~ Flügelhorn Schallbecher, *-> aber Horn ist länger als bei engen Trompeten!*
Flare Faktor +1,0 = Dual eines konischen Frustum (z.B. closed-open)
Flare Faktor -1,0 = Frustum (z.B. closed - open -> daher ebenfalls nicht harmonisch!)
Flare Faktor + oder – infinite (+/- >~100) -> Exponentialhorn!

Besselhörner:		*Gruppengeschwindigkeit lt. Benade, vp anhand U = [a*(a+1)] / x²*
Phasengeschwindigkeit	vp c' =	= w * [1 / Ö (k² - { [a*(a+1)] / x² })]
Gruppengeschwindigkeit	vg =	c0 * Ö [1- (c/w(n))² * (a*(a+1))]

Eine Faustformel für Resonanzen eines Besselhorns (open-closed) lautet (nach Dr. A. Benade)**: ****

Frequenz (n) = [Speed/ 4*(Länge+y0)+*Endkorr*] * [(2n-1) + Value * (√ (m*(m+1)))]
wobei: n = Resonanzmode# 1,2,3, usw. m = Bessel Flare Faktor und **y0=0-K**
Value = 2/Pi = 0,637 für Flares m < +0,8 ~~**Value = Wurzel aus 2 = 0,7071 für Flares > +0,8**~~

(=in einer Größenordnung wie solche bei Trompeten und Posaunenschallbechern vorkommen könnten),
*als Endkorrektur nur ca. 0,5 * Endradius *0,6133 bzw. ~ Radius mit der höchsten Hornfunktion U *0,6133)*

** Der Schnitt und Sprung bei m ~ 0,8 ist vage gewählt; es wird prinz. die Länge eines closed Zyl. + y0 als eine Art Endkorrektur + einem Wert in Verbindung mit dem Flare Faktor verwendet. Besselhörner m >0,5 würden auch nur in Kombination mit anderen Geometrien (z.B. als Schallbecher) zum Einsatz kommen, durch das Mode matching ändern sich die resultierenden Resonanzen der Kombination nochmals stark.

Mit Value 0,7071 gibt Flare 1,0 die Resonanzen einen Konus mit vorhandener Spitze; es ist aber das Dual eines Frustum!

Die Formel gilt in etwa für y0-Werte von 2-3 cm, d.h. in etwa Schallbecherdimensionen von Trompeten und Posaunen. Bei nur sehr geringen Schallbecherausladungen weicht die Formel erheblich ab.

Besselhörner haben wie „wilde Hörner" **keine** konstante Cutoff Frequenz über die gesamte Hornlänge, sondern lassen sich durch die Hornfunktion „U" analytisch beschreiben.

Besselhörner – Fitting Parameter und die Hornfunktion U:

Geometrie – Formeln: (Var. B) mit Ausgangspunkt:

die Alistair Formel: **r(x) = B * { 1 / [(x0-x)^m] }** -> *das große Ende mit rL ist bei x=0 (rechts)*
mit x0= xL+y0 x = Entf. von kl. Ende

die Benade Formel: **r(x) = B / [(x +y0)^m]** <- *das große Ende mit r0 ist bei x=0 (links)*

Aber wie berechnet man den **Parameter B**? Zum Beispiel so:

Schritt1 = [1/ (Radius klein ^ (1/m)] - [1/ (Radius groß ^ (1/m)]
Schritt2 = **B** = [Länge Besselhorn / (Schritt 1)] ^ Flarefaktor m

Von y0 weiß ich, daß dies die Entfernung vom Schallbecherende in Richtung Raum ist, an der sich die Steigung asymptotisch an eine Senkrechte anschmiegt (y0 = 0-K), also z.b. anhand K von Formel A.

Oder aber y0 anhand Parameter **B**
Schritt 3: {1/ (Radius klein / **B**) } ^(1/m) = Länge Besselhorn **rL + y0**
Schritt 4: y0= Schritt3 – rL **y0** = rL+y0 - rL

Formel von A. Myers (Var. C) mit Ausgangspunkt: <- das große Ende mit r0 ist bei x=0 (links)

Die Formel (in korrigierter) Form lautet: **r(x) = [RF ^(1+m)] * [(x0+y0)^-m]**

wobei **RF** = ein „charakteristischer Radius“ ~ ein Wert zwischen kleinem und großem Radius ist, bei Trompeten-Dimensionen ist RF cirka an jenem Punkt, wo RF = auch die Entfernung zu L+y0.
y0 kann ja auf verschiedene Art ermittelt werden. Durch den Zusammenhang, daß: B = RF^(1/m) ergibt sich somit: **RF** = **B**^(1/(1+m))

Der Wert RF taucht auch in folgender Formel auf, mit der sich die Hornfunktion U(z) eines Besselhorns unter Annahme sphärischer Wellenfronten und Flächen anhand der Geometrie ~ berechnen lassen sollte:

$$U(z) \approx \frac{\alpha(1+\alpha)}{z^2}\left[1+\alpha^2\left(\frac{R_F}{z}\right)^{2(1+\alpha)}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{S}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

= ~ anhand zentraler Differenzenformeln

wobei z = Abstand vom großen Ende bei zL +y0, alpha = Bessel-Flarefaktor m.
Hinweis: U(x) und nur Term A: m*(1+m) / x² ist die plane wavefront Formel, Term B entfällt hier.

Weitere Formeln für Besselhörner nach A. Myers:

$$z_{MC} = R_F\left(\frac{\alpha^2+2\alpha^3}{2+\alpha}\right)^{\frac{1}{2+2\alpha}}$$

Punkt der maximalen Kurvatur, dieser ist immer etwas später als z-Peak Richtung Schallbecherende und sollte keine signifikante akustische Bedeutung mehr haben...

$$z_{PEAK} \approx \left(\alpha^2 \cdot \frac{3\alpha+1}{2}\right)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}} \cdot R_F$$

Position der maximalen Hornfunktion (Cut-off)

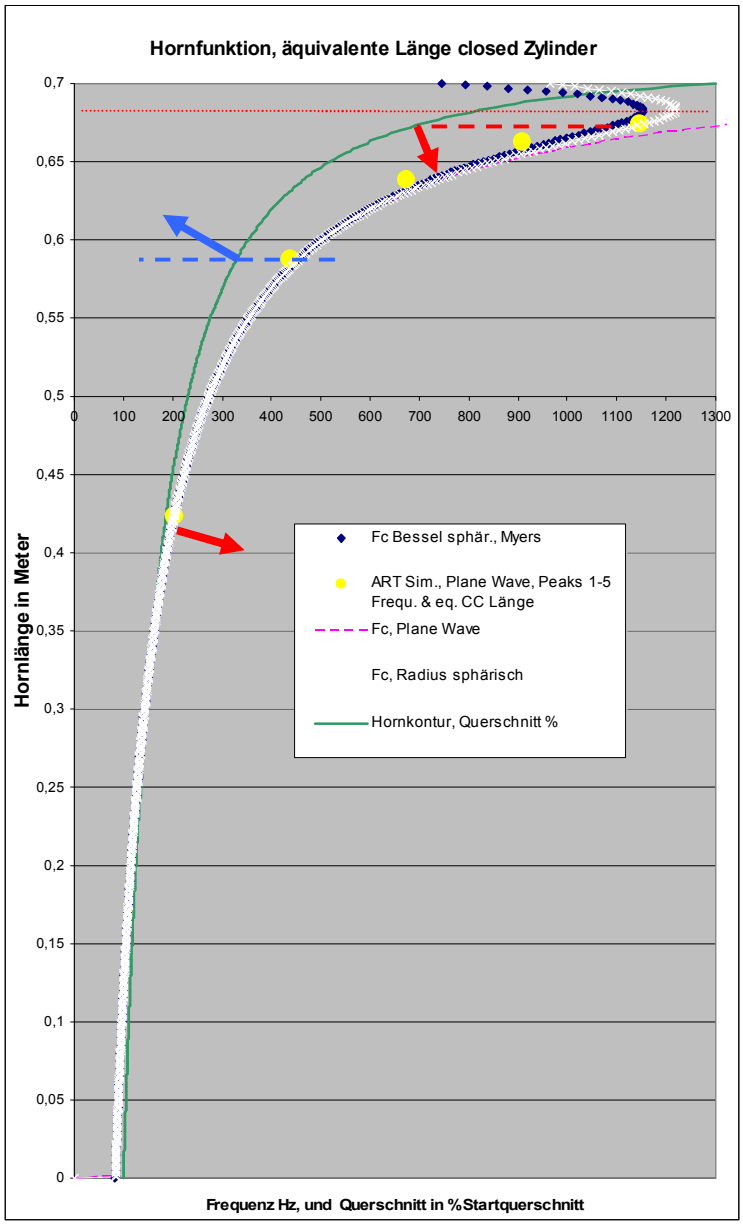
$$U_{PEAK} \approx \frac{\alpha(1+\alpha)}{z_{PEAK}^{\,2}}\left[1+\left(\frac{(3\alpha+1)}{2}\right)^{-1}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

max. Wert der Hornfunktion bei z-Peak

Hinweis: z und x sind in den Formeln teilweise vertauscht und müssen immer im Kontext verwendet werden!

Für das beispielhafte Besselhorn mit L=0,7m; Besselflare 0,7; Start Radius 0,005m, Endradius 0,065m ergeben sich: Parameter B = 0,0039667 U-Peak = k²= 443,49 Rad^2, wobei ¼ WL ~0,08m
Der Durchmesser bei U-Peak = 8,2cm =~¼ WL der Cutoff Freq., *Durchmesser bei 71,8cm wäre 186 cm!*

RF = 0,038664 Meter	Position bei x= 0,680m	= 20,3mm vor Becherende, 3mm vor z-Peak
z-Peak	Position bei x= 0,683m	= 17,3mm vor Becherende, max. U-Peak, Fc = 1152 Hz
z-MC (max. Kurvatur)	Position bei x= 0,688m	= 11,9mm vor Becherende, 5,4mm nach z-Peak.
y0 = 0,018 m	Position bei x = 0,718m	= 18,0mm nach dem phys. Becherende wäre 90° Winkel.



Das Horn auf den „Hals" gestellt.

Das beispielhafte Besselhorn mit L=0,7m; Bessel Flarefaktor m=0,7; Radius Start: 0,005m, Ende: 0,065m:
Die ART Simulation (Plane Wave, Lossfaktor 1,1) liefert Peakfrequenzen (gelb) und anhand der Formel c0 * (2n-1) / (4* Resonanzfreq) ergeben sich äquivalente Längen von einseitig geschlossenen Zylindern mit den selben ermittelten Resonanzfrenquenzen; mit einer Schallgeschwindigkeit c0=344 m /Sek.
Diese sind in guter Übereinstimmung mit der ermittelten Hornfunktion U anhand der Geometrie und den daraus resultierenden Cutoff Frequenzen: Fc(n) = (Wurzel aus U * c0) / 2*pi.

Erste Annäherungen offenen großes Ende von Hörnern:

Beispielhaft eingezeichnete rote Pfeile für Bell-Mode #1 und Mode #5 zeigen die Richtungen, in welche die Hornkontur geändert werden müsste, um diese resultierenden Resonanz Frequenzen zu erhöhen. (Querschnitt Erweiterungen)

Beispielhaft eingezeichneter blauer Pfeil für Bell Mode #2 zeigt die Richtung, in welche die Hornkontur hier geändert werden müsste, um die resultierende Resonanzfrequenz zu vertiefen.
(Eine Querschnitt Einengung im passenden Bereich).

Durch Verlängerung und ein zusätzliches Mundstück werden sich die Mode # aber bei ~ gleicher Frequenz verdoppeln. Mode matching + MPC EL kommt hinzu; Bell Cut-off Frequ. aber bleibt.

Hornfunktion - Zusammenfassung:

Insgesamt ist die Hornfunktion „U“ ein Erklärungsversuch bei dem es in diesem Teil vorerst bleiben soll. Die Hornfunktion liefert Aufschlüsse, an welcher (Cut-off) Position ein geschlossener Zylinder mit selber resultierender Resonanzfrequenz zu Ende wäre und somit die äuqivalente Closed Zylinderlänge. Durch die Potentialbarriere sind hier allerdings nicht die abschließenden Druckknoten, diese liegen exponential gedämpft am Schallbecherende bzw. etwas außerhalb (Endkorrektur). Es fehlen bei der Betrachtung aber die Abweichungen durch viskothermale Verluste und Abstrahlung sowie Wandschwingungen.

Die Cut-off Frequenz gibt Aufschluß darüber, wie „hell/bright“ ein Schallbecher klingen kann und wo die physikalischen Grenzen des Resonators sind (Ausbildung stehender Wellen / oder Dämpfung dieser). Es bleibt zu erwähnen, daß Schallbecher natürlich nicht zwangsweise einen runden Querschnitt haben müßen, eine effektive Querschnittfläche ist letzlich die dominierende Größe und diese wird in jedem Fall „geraten“.

Ein sogenannter „Brassiness“- bzw. Schockwellen-Effekt wird auf andere Art erklärt, beschrieben und hängt stark von einer zylindrischen Mindestlänge und in Verbindung mit einer „sehr engen“ zyl. Mensur zusammen. „Brassiness“ & Schockwellen haben ihren Ursprung in langen, engen und vor allem zylindrischen Teilen! Diese werden aber von ausladenden Schallbechern aller Art sogar reduziert und „bedämpft“!

Weitere, überschlägige Notizen zur Dimensionierung von Schallbechern:

Ein ~Frequenz-Übergangsbereich, oberhalb welchem stetig mehr abgestrahlt als reflektiert wird:
Dieser ~ Crossover-Freq. Bereich liegt niedriger als die Cutoff-Frequenz, fco ~ **c0 / (2*pi *a)**
a = ein grober Wert für den Endradius =~ **c0** / **Umfang** Schallbecheröffnung in m

Beispiel: Ein Trompetenschallbecher mit 13cm End-Durchmesser =0,065m Radius = Umfang 0,4 m.
Crossover-Frequenz = ~ Speed / Wellenlänge anhand Umfang = 344 / 0,4 =~ 860 Hz
Bei einer Bb-Trompete also grob ~ „hohes Bb“ (=Bb2) und ~ im Bereich einer üblichen MPC Popping Freq..

Beschreibung in Bias, © ARTIM / Mag. Gregor Widholm:

> **Als Faustregel gilt folgendes:** ist der Betrag der Wellenlänge einer Frequenz um Vieles größer als der Schalltrichterdurchmesser, dann wird diese Frequenz größtenteils reflektiert. Liegt die Wellenlänge einer Frequenz in der Größenordnung des Schalltrichter-durchmessers, so wird sie teilweise durchgelassen und zum Teil reflektiert. Ist die Wellenlänge geringer als der Schalltrichterdurchmesser (ab der Cut Off Frequenz), so wird sie zur Gänze durchgelassen.

Näher anhand Eingangs-Impedanzmessungen wäre ~ eine ½ Wellenlänge als Maßstab:

½ WL einer Frequenz mit	*1000 Hz*	*= Speed 343m / 1000 Hz /2*	*= 0,17 Meter*
Schallbecher Dia 12cm ~	*1500 Hz*	*= Speed 343m / 1500 Hz /2*	*= 0,12 Meter*
	2000 Hz	*= Speed 343m / 2000 Hz /2*	*= 0,08 Meter*

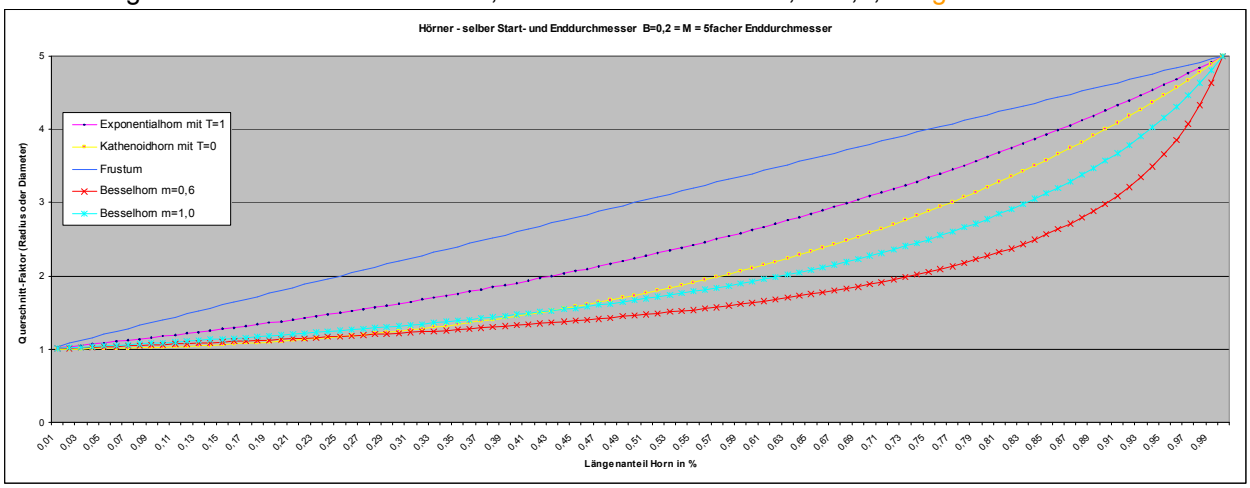
Betrachtet man aber den Punkt der höchsten Hornfunktion bei Trompeten, so liegt diese ~ am Punkt, wo der Durchmesser ~1/4 Wellenlänge der Cutoff Frequenz beträgt. Der Enddurchmesser selbst ist nicht relevant! Das stellt aber die sphärischen Modelle auf die Prüfbank: Sind eqiv. Radien besser geeignet = höhere Fc? Die Cut-off Frequenz aus sphärisch/sphärisch oder ev. sogar sphärisch/plane erscheinen mir realistischer.

Abschlußnotiz Exponentialhörnern:

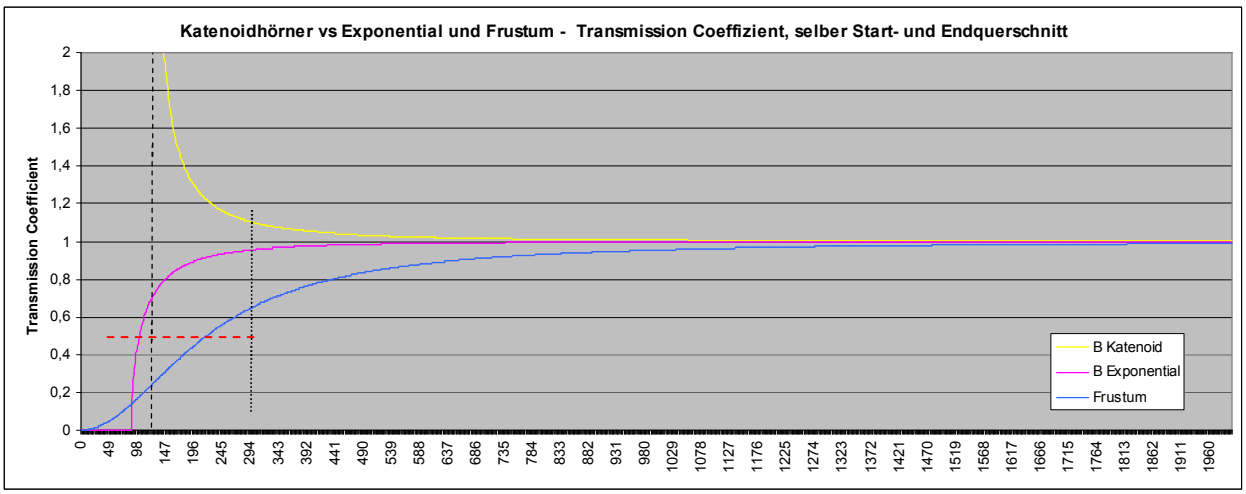
Am Versuch die Hornfunktion eines „Bessel-Style“ Schallbechers durch viele und sehr kurze Exponential-Segmente nach einer Methode, die von Amir und Rousenhouse et al beschrieben wird zu berechnen, bin ich kläglich gescheitert. Insgesamt stehe ich mit dem Exponentialhorn-Formeln daher auf Kriegsfuß. Alle mir bekannten Formeln weichen bei der Berechung möglicher Resonanzfrequenzen stark ab, verbunden mit der oft gefundenen Formel für den Transmission Koeffizienten, der reziprok den Längenfaktor eines Zylinders geben sollte. Dieser stimmt mit meinen Simulationen aber (gar) nicht überein. Ich vermute als Fehlerquelle natürlich mich selbst. Exponential Schallbecher kommen glücklicherweise in der Praxis nicht vor. Sobald mir jemand die Diskrepanzen erklären kann, werde ich das umgehend aufarbeiten, ergänzen und korrigieren.

Hörner (closed-open) im direkten Vergleich, Teil A:

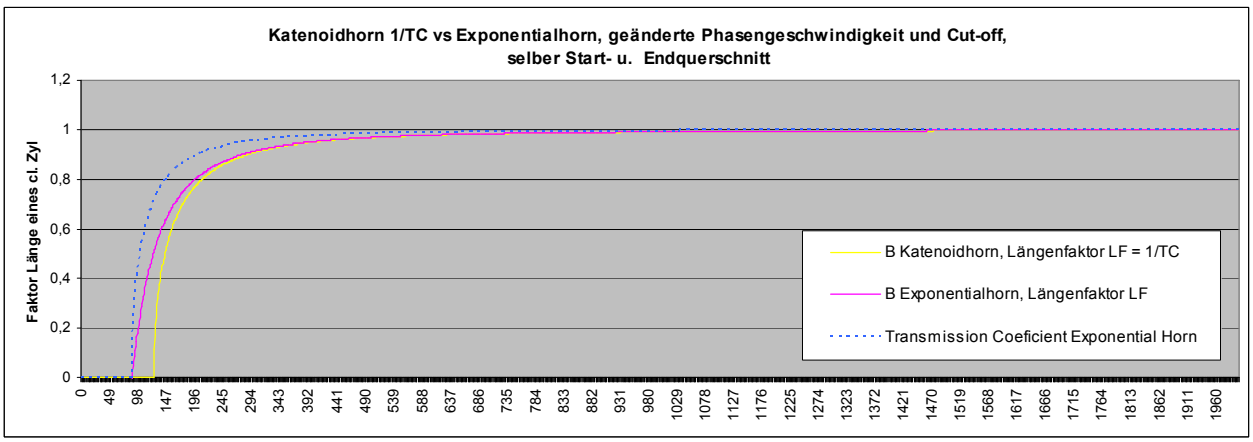
Abmessungen: Start Durchmesser 10mm, Enddurchmesser 50mm, B=0,2, Länge 1000mm



Hinweis: Die Geometrie ist nicht maßstabgerecht dargestellt, denn die Länge ist stark gestaucht -><- !

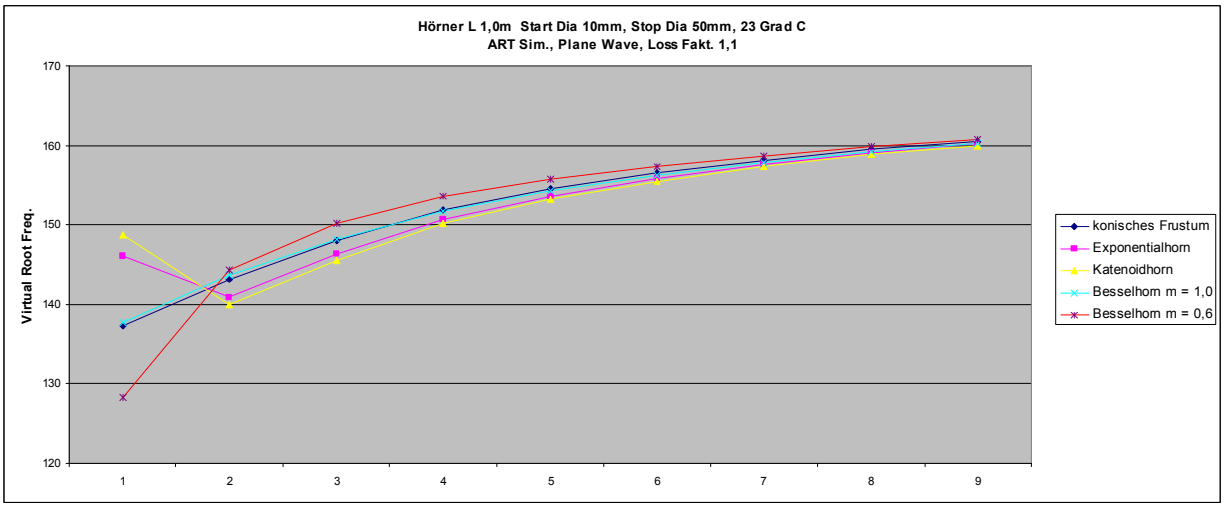


Cut-off: Katenoid m=2,292: 125 Hz, Exponentialhorn m=1,609: 88 Hz, Frustum m=0: 0 Hz rot: tc 0,5
Stellen wir uns Transmission Coeff. auch als “Input-Impedanz-Magnituden-Potential”-Generator Werte vor!



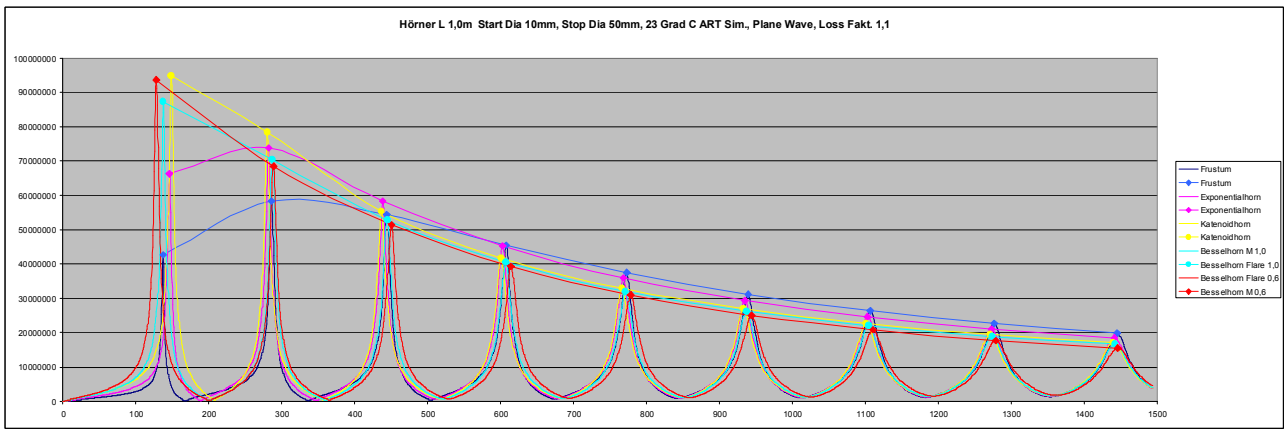
Die Transmission-Coeffizient Kurve (blau) des Exponentialhorns ist für Vergleichszwecke mit aufgetragen.

Der LF Exponentialhorn schmiegt sich mit seiner tieferen Cutoff Frequ. rasch an den LF des Katenoids an.
Differenzen zwischen Hypex Hörnern sind somit auf Unterschiede im untersten Frequ. Bereich begrenzt!
Faktor 1 ist die Länge eines CC, d.h. 1 ist nicht die harmonische Reihe n1:2:3:4, sondern $(2n)/[(2n)-1]$
Die nächste Grafik zeigt die virtuellen Grundtonfrequenzen und gibt die Abweichung von der harm. Reihe:



In der Simulation sind Resonanzen des Exponentialhorns min. höher als beim Katenoid, Ausnahme Mode#1! Besselhorn m=1 hat bei (hier) geringer Endausladung ~ Resonanzfrequenzen wie das Frustum closed-open. Besselhorn mit m=0,6 liefert mit Ausnahme Mode #1 die kürzesten effekt. Längen + höchste Grundstimmung

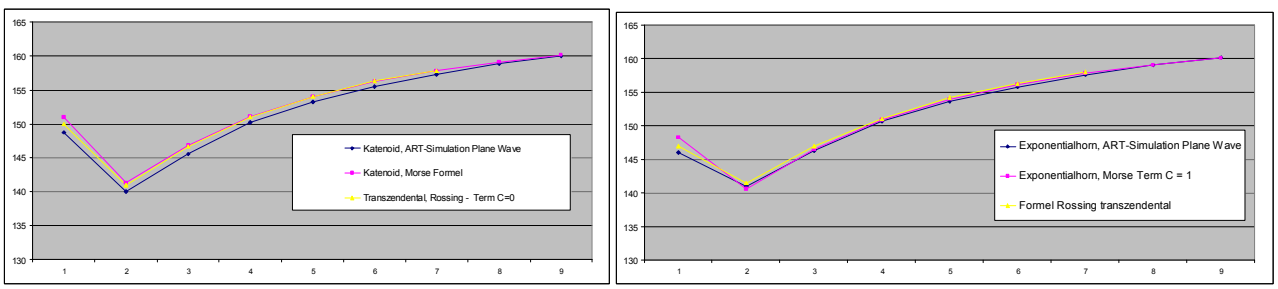
Vorhandenes Potential das abstrahlt, wird weniger reflektiert (=niedrigere Input-Impedanz-Peaks):



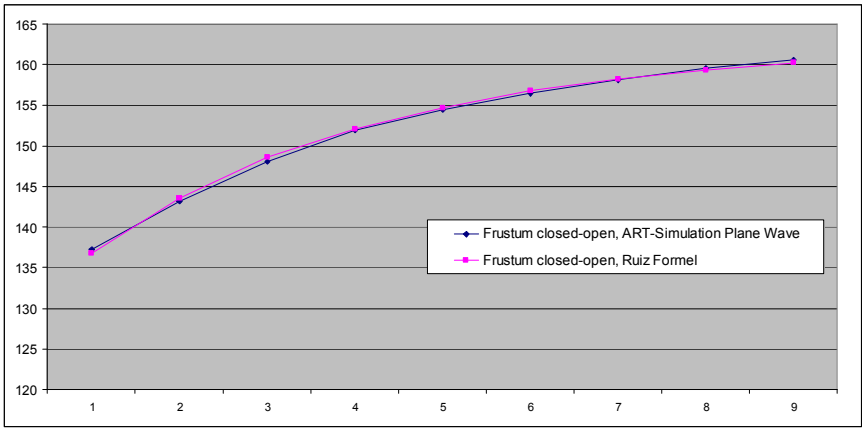
Vergleicht man die Input Impedanzkurven mit den Transmission Coeffizienten, so lässt sich erkennen, daß der Transmission Coeffizient (Potential) die generierten Druck/Fluß Amplituden am Eingang stark beinflußt.

Beim 2. Peak ~ 280 Hz z.B. liegen die Tc bei ~ 0,65 Frustum zu 0,95 Exponential zu 1,1 beim Katenoid. Im tiefen Frequenzbereich treten bei allen Hörnern starke Reflektionen auf, und stehende Wellen werden anhand des jeweiligen vorhadenen Potentials aufgebaut. Umso höher die Freqenz liegt, umso einheitlicher muß folglich das bereitgestellte Potential sein (alle Tc nähern sich asymptotisch dem Wert 1 eines Zylinders)

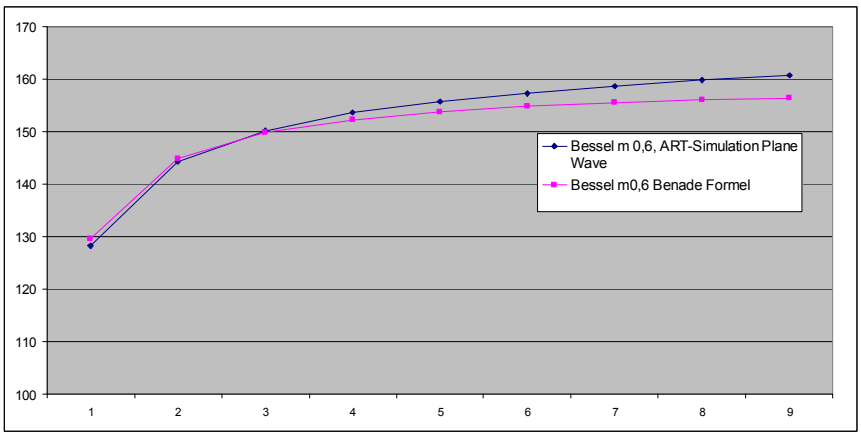
Ab einer gewissen Frequenz (hier um 450-500 Hz) fallen die Impedanz Maxima beim Katenoid- und bei beiden Besselhörnern gegenüber Exponentialhorn und Konus allerdings deutlich ab und bleiben dann relativ konstant auf diesem niedrigeren Level. D.h. diese Hörner strahlen höhere Frequenzen stärker ab.
Die Gesamtabschwächung der Hüllkurven ist die **Summe aus Abstrahlungs- u. viskothermalen Verlusten**



Virtuelle Root Frequenzen - Equivalent Fundamental Pitch (EFP), Berechnung vs Simulation:
Die korrigierte Morse Formel beim Exponentialhorn weicht mit Ausnahme Mode #1 nicht stark ab. Die transzendentale Formel hat eine gute Übereinstimmung mit der ART-Simulation, wo Verluste berücksichtigt sind = tiefere Resonanzen.



Virtuelle Root Frequenzen (EFP), Berechnung vs Simulation –
Frustum: Ruiz Formel deckt sicht gut mit der ART Simulation und Plane Wave Approx.,
obwohl beim Frustum von sphärischen Wellenfronten ausgegangen werden müsste!

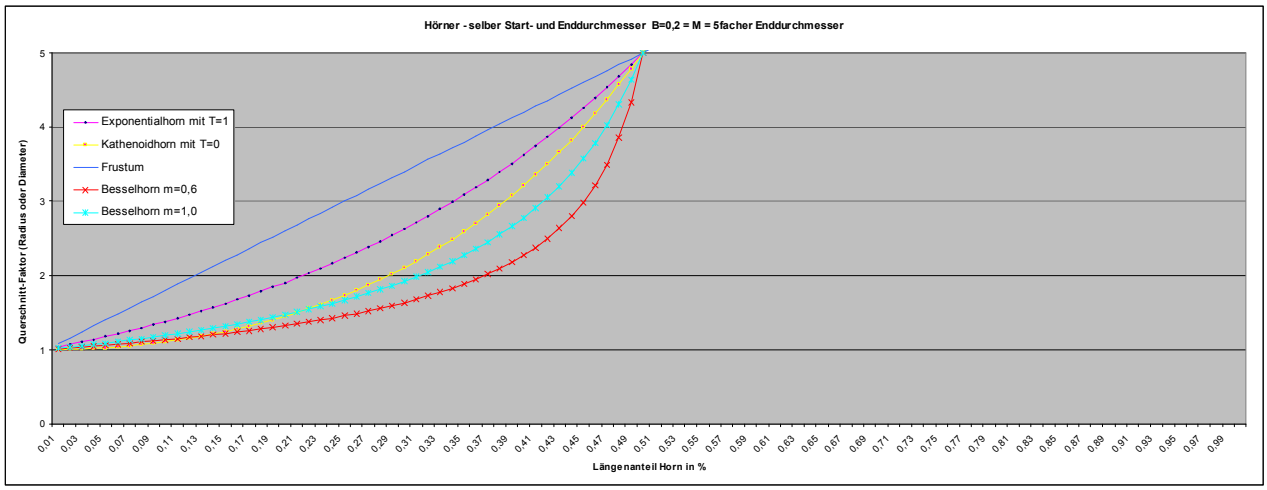


EFP, Besselhorn Formel für Resonanzfrequenzen:

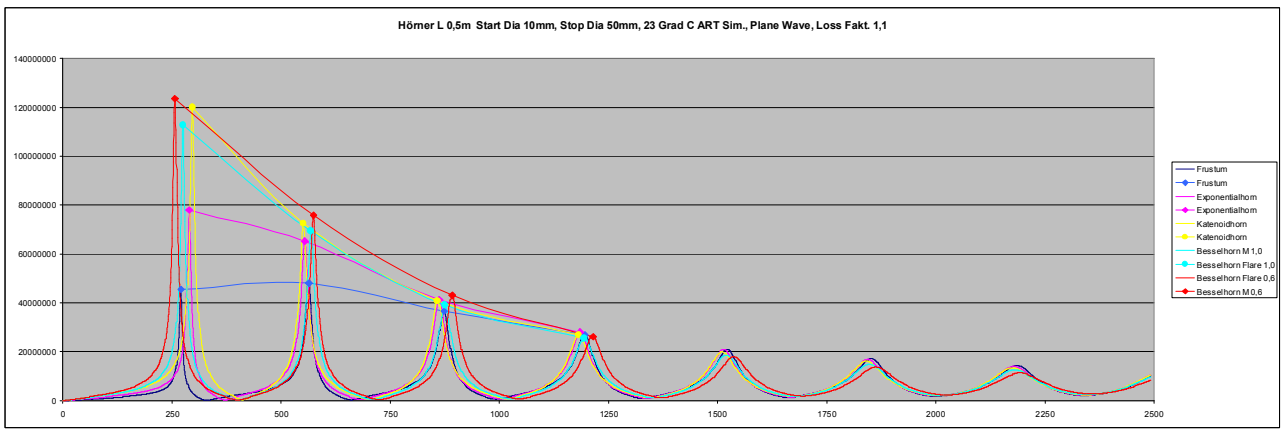
Ist die Hornausladung gering (y0 somit groß), sind die Abweichungen mit der Formel von Benade sehr hoch (m0,6)
Dasselbe ist auch der Fall, wenn der Flare gering und somit Flarefaktor hoch ist (m ~ >0,8)

Kürzere Hörner (closed-open) im direkten Vergleich, Teil B:

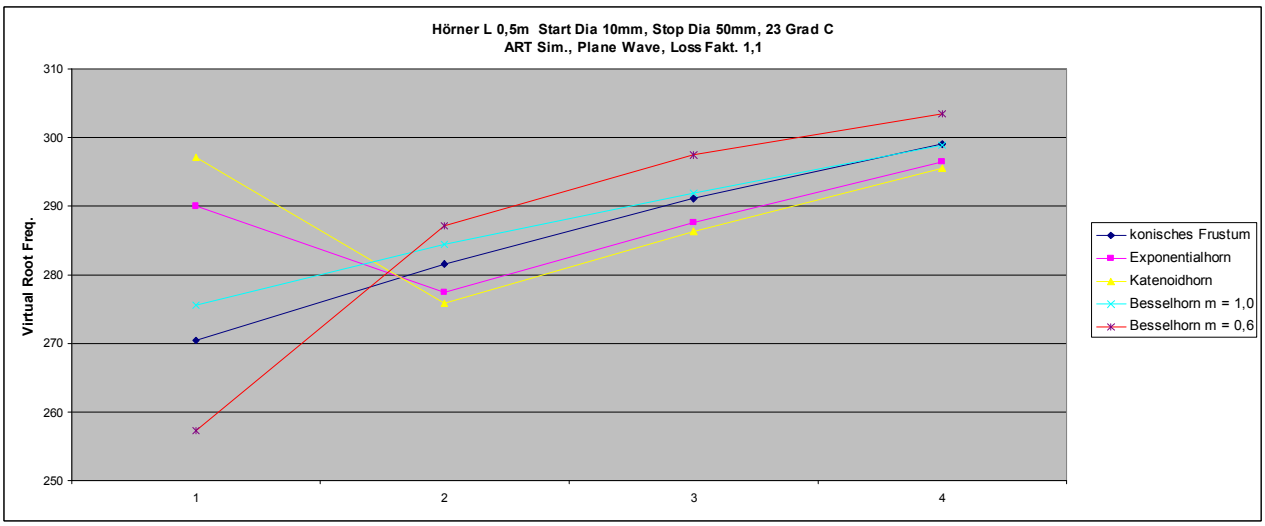
Start Durchmesser 10mm, Enddurchmesser 50mm, B=0,2, mit Länge 500mm



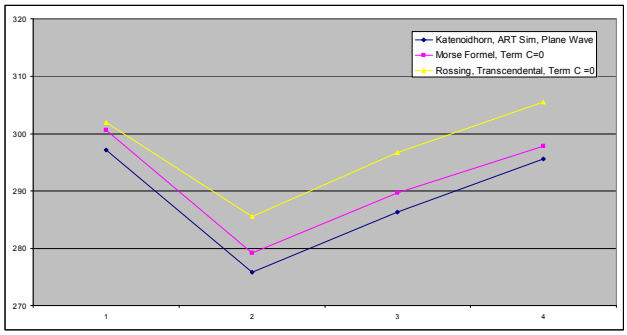
Hinweis: Die Geometrie ist nicht maßstabgerecht, denn die Länge ist stark gestaucht ->< !

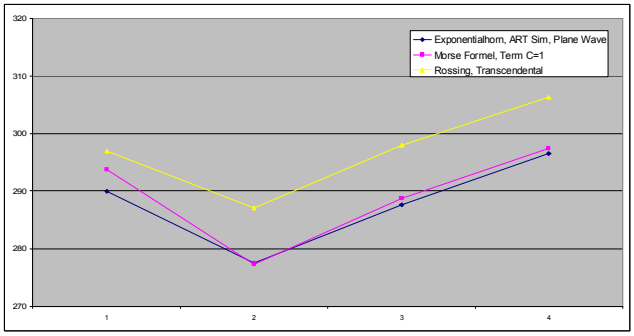


Cutoff Frequenzen: Exponentialhorn: 176 Hz, Katenoidhorn: 251 Hz Frustum: 0 Hz
Ein Übergang, ab welchen bei Besselhörnern nun vergleichsweise weniger reflektiert wird, liegt nun wesentlich höher (~1000-1200 Hz)

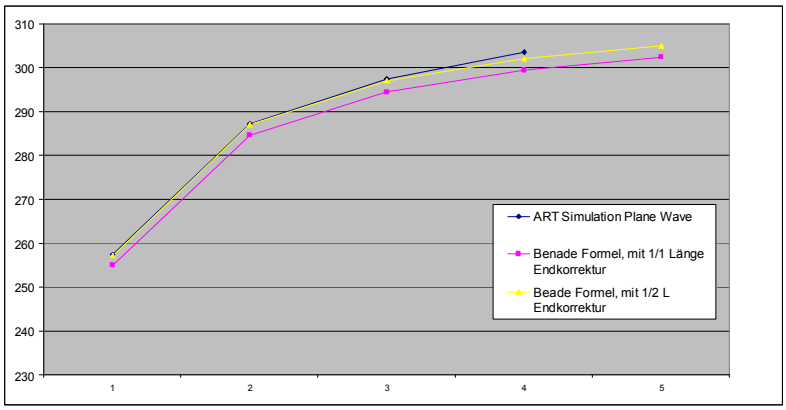


Simulation: Beim kurzen Besselhorn m=1 sind die unteren Frequenzen bereits höher als beim Frustum, beim Besselhorn m=0,6 sind nun mit Ausnahme Mode#1 alle resultierenden Frequenzen wesentlich höher.





Die transzendentale Formel liefert bei „kurzen“ Hörnern mit „hoher Steigung“ zu hohe Resonanzfrequenzen; lässt man Mode #1 außer Acht, beträgt die Differenz rund 5 % oder ~ ein Halbton - und das ist sehr viel!

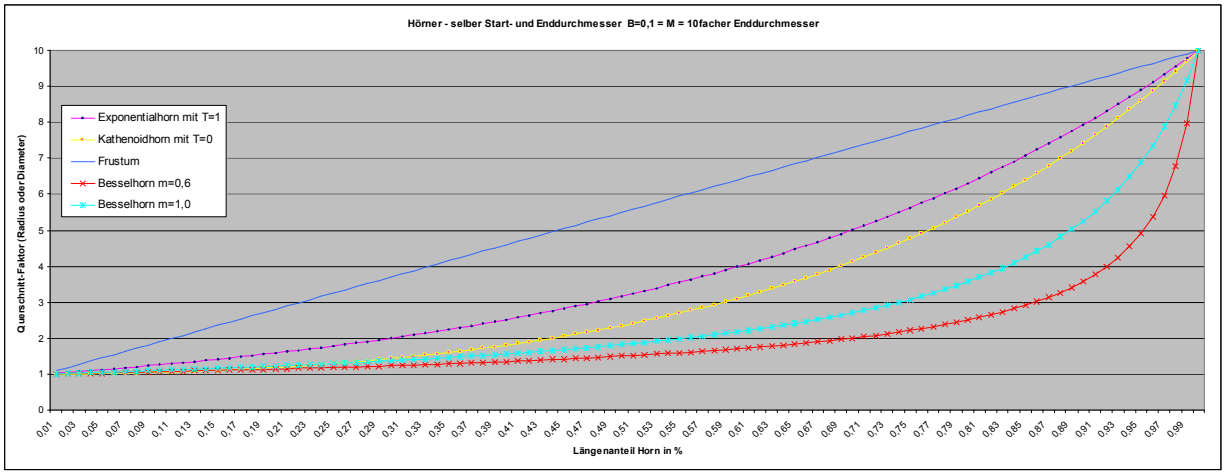


Besselhorn m=0,6
Wird bei der Benade Formel nur die ½ Endkorrektur für Lp = nur der ½ Radius angesetzt, sind die Abweichungen zur Simulation geringer, dennoch liegen die ermittelten Resonanzfreqenzen jeweils tiefer als bei der plane wave Simulation inkl. Verlusten.

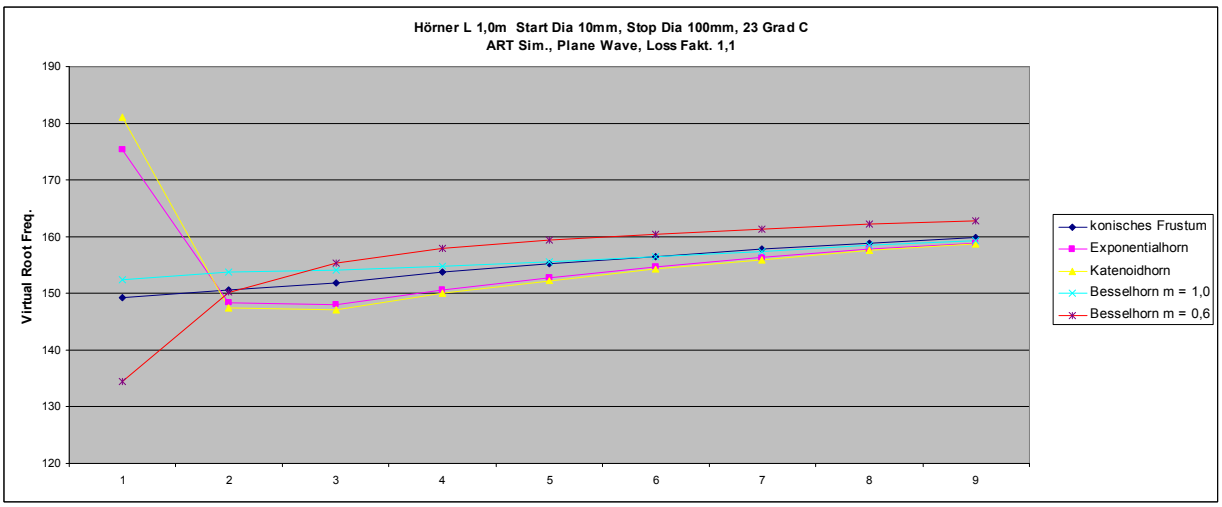
Das bedeutet, daß nicht der Endradius sondern ein kleinerer Radius innerhalb des Schalltrichters angesetzt werden sollte? (Eventuell der Radius am Punkt der höchsten Hornfunktion U?)

Hörner mit größerem Enddurchmesser (closed-open) im direkten Vergleich, Teil C:

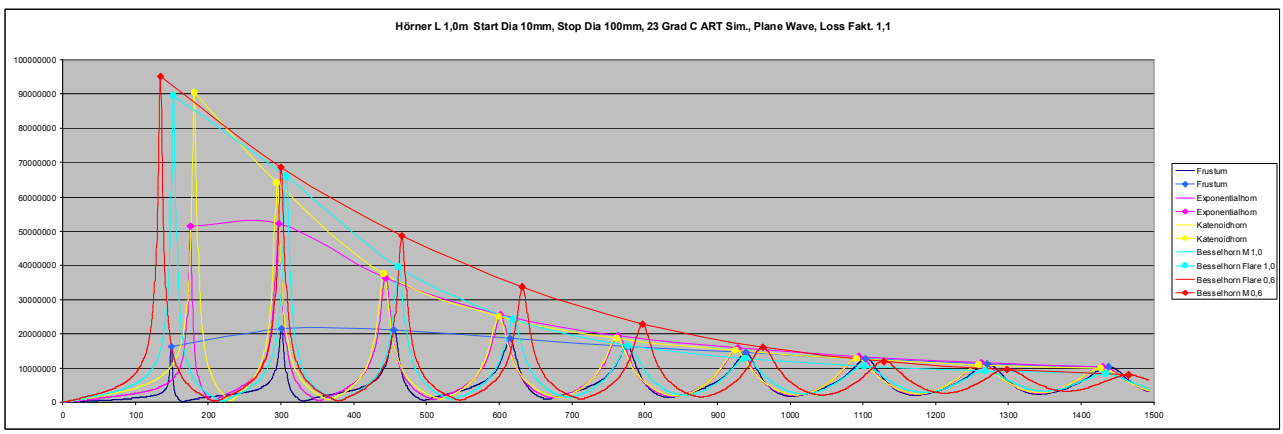
Start Durchmesser 10mm, Enddurchmesser 100mm, B=0,1, Länge 1000mm



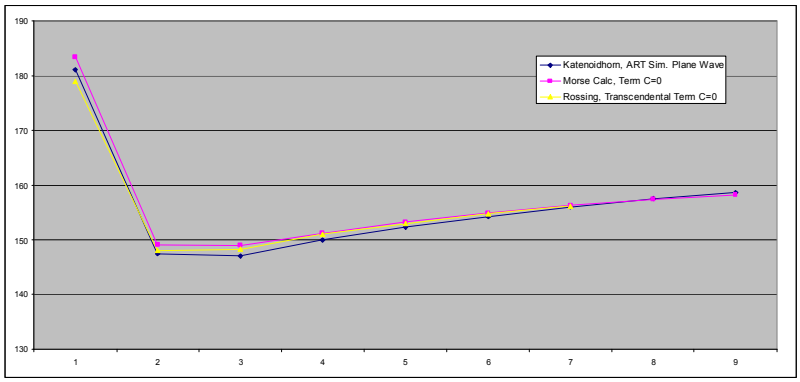
Hinweis: Die Geometrie ist nicht maßstabgerecht, denn die Länge ist stark gestaucht ->< !

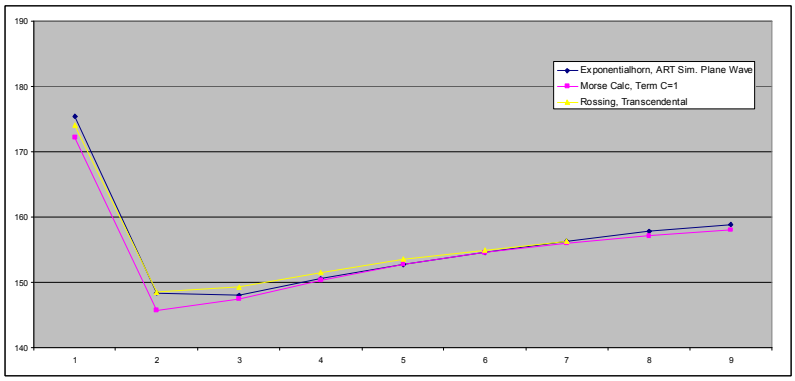


Bei einem stärkeren Bell Flare und größerer Ausladung sind beim Besselhorn m=1 die tiefen Resonanzfrequenzen nun deutlich höher als beim Frustum – die Reflektion muß folglich zusätzlich früher statfinden = kürzere Wellenlängen der stehenden Wellen.
Besselhorn m=0,6 ist nun insgesamt etwas inharmonischer als m=1,0, Mode #2+#3 sind weniger verkürzt.
Die Unterschiede einer „Grundstimmung“ betragen zwischen den Hörnern in diesem Beispiel ~ ½ Ton.

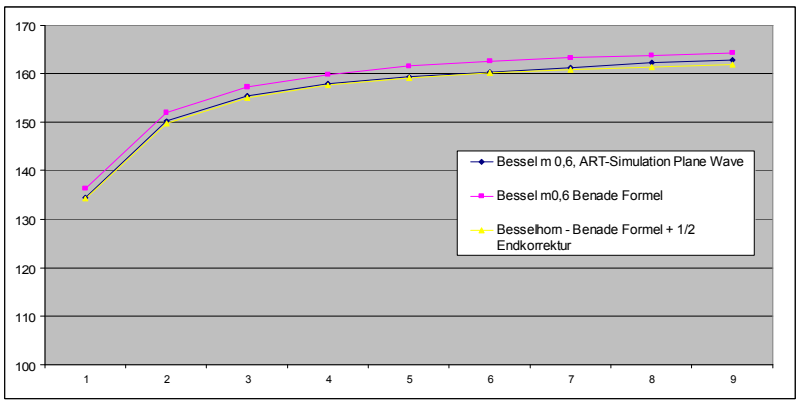


Cutoff Frequenzen: Exponentialhorn: 126 Hz, Katenoidhorn: 164 Hz Frustum: 0 Hz
Wird beim Besselhorn der Enddurchmesser und Flare größer, dann wird mehr reflektiert (Horn Barriere „U“)
Die tiefen Frequenzanteile fehlen dann im abgestrahlten Spektrum. Der Klang des Besselhorn m=0,6 muß „heller/dünner“ als der aller anderen gezeigten Schallbecherformen sein. Bessel m1 würde „wärmer“ klingen!





Die transzendentale Formel liefert bei Exponentialhörnern mit „hoher Steigung“ zu hohe Resonanzen.



Besselhorn m=0,6:
Bei einer größeren Schallbecherausladung stimmt die Formel von Benade besser überein, y0 ist hier 2,2cm
Die Frequenzdifferenz ist gegenüber der ART plane wave Simulation in etwa um eine 0,5fache Endkorrektur zu hoch. y0 in der Formel stellt bereits eine Art Endkorrektur dar.
Wird die effektive Korrektur bei diesem Flarefaktor (und y0) auf nur die Hälfte vom Endradius * 0,6133 reduziert, dann sind gut übereinstimmende Ergebnisse gegenüber der Plane-Wave Simulation gegeben.

Vergleich der Hörner - Fazit:

Die korrigierte Morse-Formel bleibt ein Kompromiß, die transzendentale Formel ist nur bei ausreichend wenig Flare, oder ausreichend langer Hornlänge annähernd genau und liefert im Zweifel zu hohe Resonanzfrequenzen. Der Trend selbst und die Inharmonizität selbst bleiben aber für Versuche und grobe Vergleiche aussagekräftig. Die Salmon-Hörner beindrucken mit ihren 1. „viel zu hohen“ Resonanzmoden, schneiden allerdings in punkto Harmonizität gegenüber Besselhörnern mit m > 0,6 immer schlechter ab.

Insgesamt denke ich kann man sich anhand der Ergebnisse einen Eindruck verschaffen, wie sich die Form von Hörnern auf Stimmung, Klang und Spielbarkeit tatsächlich auswirkt. Es soll aber auch verdeutlichen, daß die Intonation im obersten Frequenzbereich nicht primär von der Hornform abhängt, sondern daß mit Ausnahme Mode #1 eine monoton steigende Harmonizität näherungsweise erreicht wird. Umso stärker die Steigung des Bell-Flares im letzen Becherabschnitt ist, desto höher ist eine gemeinschaftliche “Kompromiß“-Grundstimmung, dann aber dafür auch eine stärkere Abweichung der unteren Modes von dieser.
Im folgenden Teil 2E meiner Arbeit geht es um Mode-matching und die Kombination der Komponenten.